8.X 2018.

Druga kvantizacija

1. Naći energijski spektar jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora opisanog Hamiltonijanom $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ uvodeći operatore $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$ na sledeći način

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}, \quad \hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p} \quad .$$

Koristiti komutacione relacije između operatora $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$, kao i fizičku činjenicu da je spektar Hamiltonijana ograničen odozdo, odnosno postoji stanje najniže energije (osnovno stanje).

2. Naći proizvod neodređenosti $(\Delta x)_n(\Delta p)_n$ u $n-$tom svojstvenom stanju jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora. Kvadrat neodređenosti koordinate je definisan kao $(\Delta x)_n^2 = \langle n|\hat{x}^2|n\rangle - \langle n|\hat{x}|n\rangle^2$, i slično za kvadrat neodređenosti impulsa. Posebno diskutovati slučajeve $n = 0$ i $n = 1$.

3. Pokazati da operator polja $\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})$ kreira jednu česticu spina σ u tački $\mathbf{r}$.

4. Polazeći od operatora broja čestica zapisanog u obliku $\hat{N} = \sum_{f,\sigma} \hat{a}^\dagger_{f,\sigma}\hat{a}_{f,\sigma}$ (gde je korišćen kompletni ortonormirani jednočestični bazis $\{|f\rangle|\sigma\rangle\}$, kvantni broj f opisuje stanja čestice u orbitnom prostoru, dok je σ spinski kvantni broj) i prelazeći na operatore polja $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_f \langle \mathbf{r}|f\rangle \hat{a}_{f,\sigma}$, pokazati da se isti operator može zapisati kao

$$\hat{N} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\hat{\rho}(\mathbf{r}),$$

gde je $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_\sigma \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ operator gustine broja čestica. Pokazati da je Fourierova transformacija operatora $\hat{\rho}(\mathbf{r})$, koja se definiše izrazom $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \Omega^{-1}\sum_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{qr}}\,\hat{\rho}(\mathbf{q})$ (Ω je normalizaciona zapremina), data kao $\hat{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}$, gde su $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}$, $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ Fourierove transformacije operatora polja.

5. Napisati operator ukupnog spina sistema elektrona $\hat{\mathbf{S}} = \sum_i \hat{\mathbf{s}}_i$ koristeći jednočestični kompletni ortonormirani bazis $\{|f\rangle|\sigma\rangle\}$ definisan u zadatku 4. Koristeći dobijeni rezultat i prelazeći u koordinatni bazis $\{|\mathbf{r}\rangle|\sigma\rangle\}$, napisati operator *gustine spina* $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r})$ *u tački* $\mathbf{r}$. Izračunati komutator $[\hat{s}_x(\mathbf{r}), \hat{s}_y(\mathbf{r}')]$.

6. Posmatrajmo mnogočestični sistem koji se nalazi u spoljašnjem polju (potencijal interakcije $U(\mathbf{r})$) i čije čestice interaguju parnom interakcijom (potencijal $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$). Polazeći od opšteg izraza za Hamiltonijan ovog sistema u proizvoljnom jednočestičnom bazisu, pokazati da Hamiltonijan izražen preko operatora polja glasi

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \sum_\sigma \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}' \sum_{\sigma\sigma'} \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(\mathbf{r}')V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}')\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}).$$

7. Neka je $\varphi_\alpha(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ talasna funkcija koja opisuje svojstveno stanje α mnogočestičnog sistema definisanog u zadatku 6 (jednostavnosti radi, u ovom zadatku ne razmatramo spinski stepen slobode), odnosno

$$\left[\sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\right] \varphi_\alpha(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = E_\alpha \varphi_\alpha(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N).$$

Pokazati da je vektor $|\varphi_\alpha\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \ldots \mathrm{d}\mathbf{r}_N\, \varphi_\alpha(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1)\ldots\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_N)|0\rangle$ svojstveni vektor Hamiltonijana $\hat{H}$ definisanog u zadatku 6, odnosno $\hat{H}|\varphi_\alpha\rangle = E_\alpha|\varphi_\alpha\rangle$.

8. Pokazati da je Hamiltonijan mnogočestičnog sistema definisanog u zadatku 6 izražen preko operatora $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}$, $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ oblika

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \frac{1}{\Omega}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ \sigma}} U(\mathbf{q})\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \frac{1}{2\Omega}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}\\ \sigma_1,\sigma_2}} V(\mathbf{q})\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_1,\sigma_1},$$

gde je Ω normalizaciona zapremina, dok je $U(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, U(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{qr}}$ (i slično za $V(\mathbf{q})$) Fourierova transformacija potencijala interakcije.

9. Za Hamiltonijan dobijen u zadatku 8, izračunati komutatore $[\hat{H},\hat{N}]$ i $[\hat{H},\hat{\mathbf{P}}]$, gde su $\hat{N}$ i $\hat{\mathbf{P}}$ redom operatori broja čestica i ukupnog impulsa.

10. Neka Hamiltonijan sistema komutira sa operatorom ukupnog broja čestica $[\hat{H},\hat{N}]=0$. Pokazati da tada važi selekciono pravilo
$$\langle \hat{a}^\dagger_{f_1}\dots\hat{a}^\dagger_{f_n}\hat{a}_{f'_1}\dots\hat{a}_{f'_m}\rangle \propto \delta_{nm} \quad ,$$
odnosno za $n\neq m$ data srednja vrednost je jednaka nuli, dok može biti nenulta samo za $n=m$. Pod usrednjavanjem se podrazumeva termodinamičko usrednjavanje
$$\langle\dots\rangle = \frac{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}\dots\right)}{\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}}.$$

11. Neka Hamiltonijan sistema komutira sa operatorom ukupnog impulsa sistema $[\hat{H},\hat{\mathbf{P}}]=0$. Pokazati da tada važi selekciono pravilo
$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}_1}\dots\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}_n}\hat{a}_{\mathbf{p}'_1}\dots\hat{a}_{\mathbf{p}'_m}\rangle \propto \delta\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i,\sum_{i=1}^{m}\mathbf{p}'_i\right) \quad ,$$
odnosno za $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i\neq\sum_{i=1}^{m}\mathbf{p}'_i$ data srednja vrednost je jednaka nuli, dok može biti nenulta samo za $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{p}'_i$. Pod usrednjavanjem se podrazumeva termodinamičko usrednjavanje. Specijalno, kako izgleda izvedeno selekciono pravilo ako pored $[\hat{H},\hat{\mathbf{P}}]=0$ važi i $[\hat{H},\hat{N}]=0$?

12. Posmatrati sistem opisan Hamiltonijanom iz zadatka 6. Znajući da je operator gustine broja čestica definisan kao u zadatku 4 i definišući operator gustine struje čestica $\hat{\mathbf{j}}(t,\mathbf{r})$ tako da važi jednačina kontinuiteta $\partial_t\,\hat{\rho}(t,\mathbf{r})+\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{j}}(t,\mathrm{r})=\hat{0}$, pokazati da je operator gustine struje čestica dat izrazom
$$\hat{\mathbf{j}}(t,\mathbf{r})=\frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\sum_\sigma\left(\hat{\psi}^\dagger_\sigma(t,\mathbf{r})\left(\nabla\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r})\right)-\left(\nabla\hat{\psi}^\dagger_\sigma(t,\mathbf{r})\right)\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r})\right).$$
Vremenski zavisni operatori su definisani u Heisenbergovoj slici $\hat{\rho}(t,\mathbf{r})=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\rho}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}$.

13. Napisati Hamiltonijan sistema identičnih čestica mase m i naelektrisanja q u elektromagnetnom polju opisanom potencijalima $\Phi(t,\mathbf{r})$ i $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ koristeći operatore polja. Znajući da je varijacija Hamiltonijana $\delta\hat{H}$ usled varijacije vektorskog potencijala $\delta\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ oblika
$$\delta\hat{H}=-\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,\hat{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r})\cdot\frac{\delta\mathbf{A}(t,\mathbf{r})}{c},$$
izvesti da se operator gustine električne struje $\hat{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r})$ može zapisati u obliku
$$\hat{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r})=\frac{q\hbar}{2\mathrm{i}m}\sum_\sigma\left(\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\left(\nabla\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})\right)-\left(\nabla\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\right)\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})\right)-\frac{q^2}{mc}\mathbf{A}(t,\mathbf{r})\sum_\sigma\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}).$$

14. Pokazati da je Fourierova transformacija $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{q})$ operatora gustine struje čestica $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ definisanog u zadatku 12 data izrazom
$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{q})=\sum_{\mathbf{k},\sigma}\frac{\hbar}{m}\left(\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}.$$

15. Posmatrati sistem dva identična interagujuća linearna harmonijska oscilatora (masa m, frekvencija ω), čija je interakcija opisana Hamiltonijanom $\hat{H}_{\mathrm{int}}=\alpha\,\hat{x}_1\hat{x}_2$, gde su $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ operatori koordinate za pojedinačne oscilatore. Posmatrati transformaciju operatora
$$\hat{X}_1=\hat{x}_1+\hat{x}_2,\quad \hat{X}_2=\hat{x}_1-\hat{x}_2 \quad .$$
Prepisati Hamiltonijan sistema pomoću operatora $\hat{X}_1,\hat{X}_2$ i njima konjugovanih impulsa $\hat{P}_1,\hat{P}_2$. Koristeći zadatak 1, pokazati da je moguće uvesti kreacione i anihilacione operatore tako da se Hamiltonijan raspreže na sistem dve neinteragujuće bozonske mode. Čemu su jednake frekvencije dobijenih bozonskih moda? Napisati odgovarajuće komutacione relacije.

16. Naći energijski spektar Hamiltonijana
$$\hat{H}=\epsilon\,\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{\delta}{2}(\hat{a}\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)$$
koristeći kanonsku transformaciju $\hat{a}=u\hat{b}+v\hat{b}^\dagger$, gde su u,v realne konstante. Operatori $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ (kao i operatori $\hat{b},\hat{b}^\dagger$) zadovoljavaju bozonske komutacione relacije, dok za konstante ϵ i δ važi $|\delta/\epsilon|<1$.