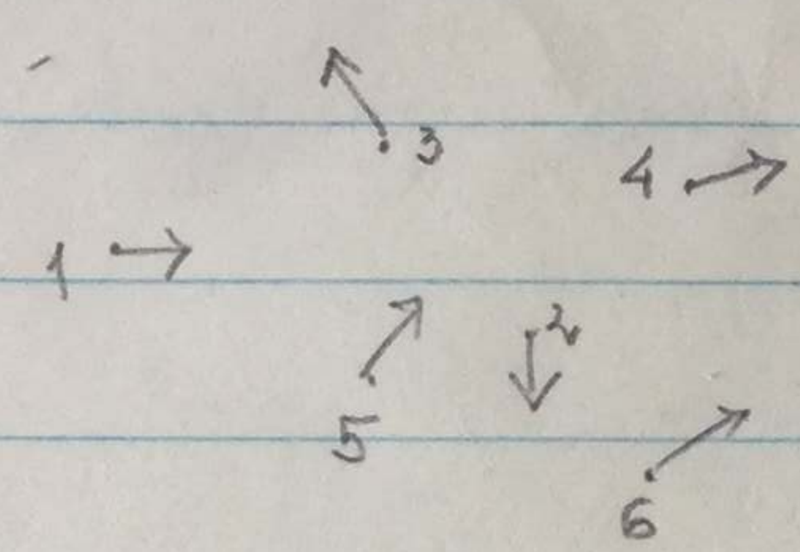
I Друга квантизација

(A) Идентичне честице?

(а) Класично:



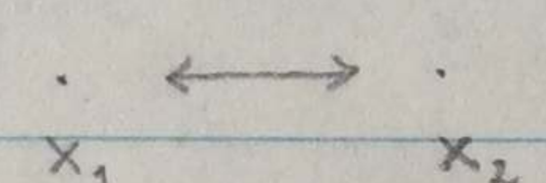
измена $1 \longleftrightarrow 2$

→ ново микро стање

Квантно не! (и зашто би због релација неодређености)

⟹ 1. смањује простор стања

2. фермиони и бозони:



I. $\Psi(x_2, x_1) = e^{i\varphi}\Psi(x_1, x_2)$

(до на фазу исто стање)

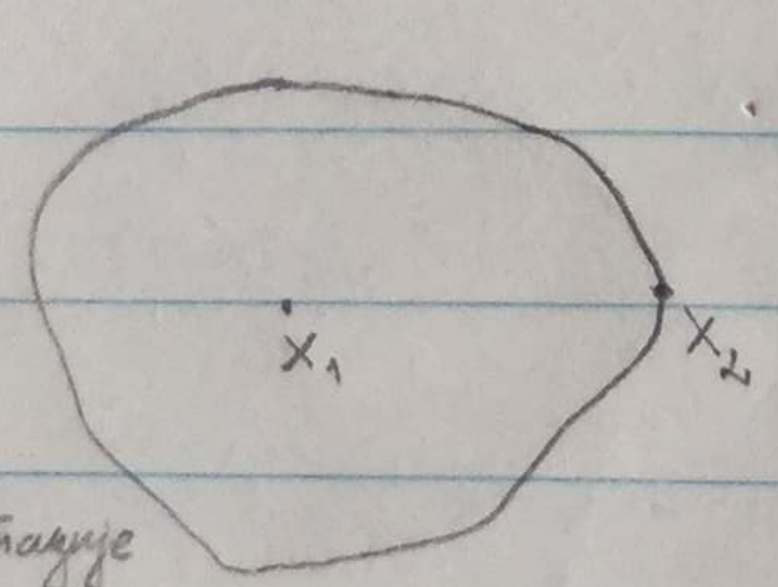
II. $e^{i2\varphi} = 1 \qquad \Longrightarrow \varphi = 0, \pi$

из једнозначности таласне функције

Ово је математички аргумент али је и могућа физичка реализација тј. дефинисање статистике честица као физичке величине: обилажење → фаза на затвореној путањи (сама фаза нема физички смисао)

2 dim

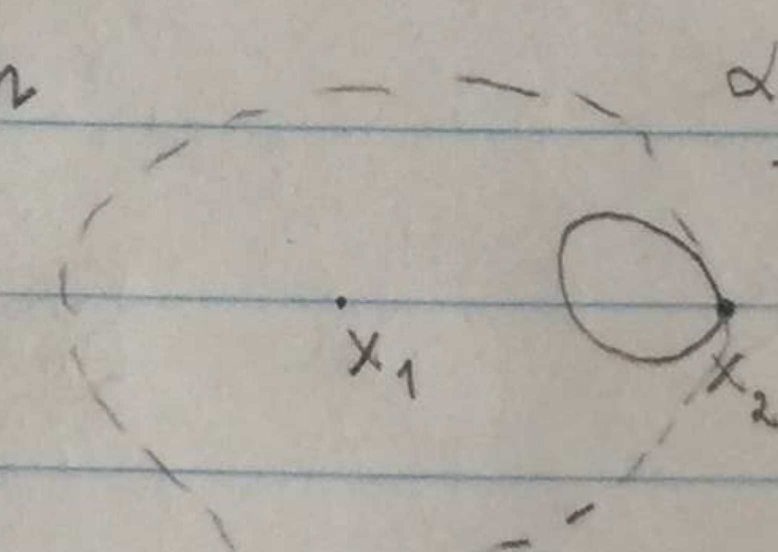
„анјони“ као могућност (колективне ексцитације система)



$e^{i\alpha}$

$\alpha : [0, 2\pi]$

3dim



$\alpha = 0, 2\pi$ → само фермиони и бозони!

Један од основних принципа КМ: објашњене многих феномена: од Pauli принципа у атомској до суперфлуидности, суперпроводности, металног стања итд. у ФКМ (физици кондензоване материје)

Када је КМ важна?

de Broglie $\lambda \sim \frac{h}{p}$ и оцена p: $\frac{p^2}{2m} \sim kT$ (идеални гас)

$\longrightarrow \lambda \sim \frac{1}{\sqrt{mT}}$ је значајна:

„термална таласна дужина"

1. мала маса – He^4, He^3 изузетне квантне течности
2. „ниске температуре" – релативна мера и због интеракција

(б) Друго изненађење КМ: <u>Спин</u>

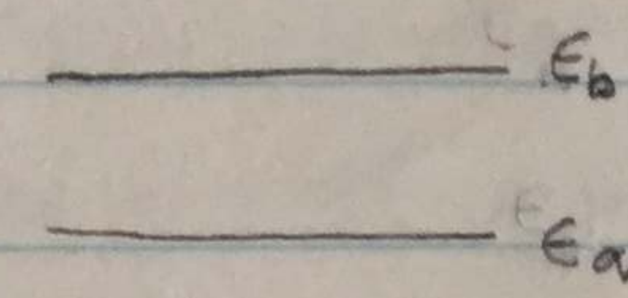
За би схватили одакле спин потребно је разматрати опис <u>на високим енергијама</u> (када су честице на веома малим растојањима) и где редукто нема равномерно распоређених јона кристалне решетке у којој се електрон креће тј. где су транслаторна и ротациона симетрија нарушене ⇒
Вишак симетрије са Лоренцовом групом релативистичке КМ је праћен новим квантним бројевима: Спин
За би обезбедили локалност описа на великим енергијама захтева се повезаност спина и статистике:

фермиони – полуцелобројни спин
бозони – целобројни спин

⇒ и у ФКМ (иако не мора)

в) Пример:

$N = 2$ два стања $|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle$



идентичне честице

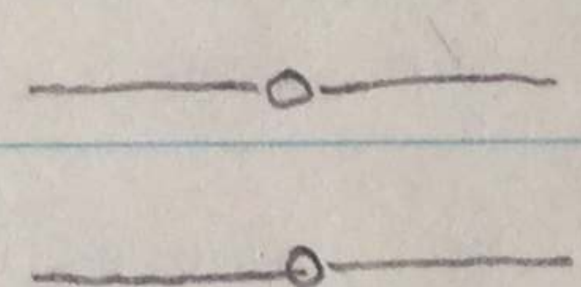
$$\psi_a(x) \;,\; \psi_b(x)$$

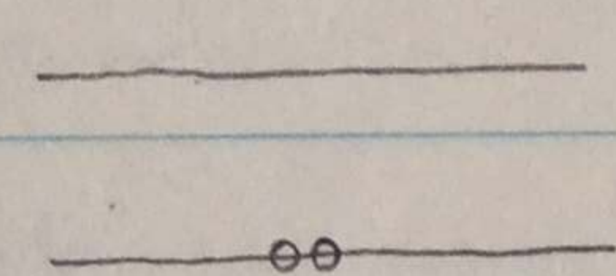
фермионско: (без спина)
$$\psi^f_{ab}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\right)$$

бозонска:
$$\psi^b_{ab}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\right)$$

$$\psi^b_{aa}(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_a(x_2)$$
$$\psi^b_{bb}(x_1, x_2) = \psi_b(x_1)\psi_b(x_2)$$

основна: фермиони: бозони:





опис могућ преко попуњености!

(б) Формализам у различивој слици

N честица $\quad \mathcal{H}_i$ = Хилбертов простор стања једне честице i

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

стање система: $|\psi_1\rangle_1 \times |\psi_2\rangle_2 \times \cdots |\psi_N\rangle_N$

$|\psi_i\rangle_i$ – честица i у стању ψ_i

КМ: идентичне честице су фермиони или бозони $\Rightarrow$

„детерминанте или перманенте" су могућа стања идентичних честица (као и њихове суперпозиције)

Опис:

$$|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \xi^P |\psi_{P(1)}\rangle_1 \times |\psi_{P(2)}\rangle_2 \times \dots \times |\psi_{P(N)}\rangle_N$$

$\uparrow$ сума по пермутацијама

где $\xi = -1$ Ферми, $\xi = +1$ Бозе

$\xi^P \equiv \mathrm{sgn}\, P$ тј. P у ξ^P је број транспозиција или измена у опису пермутације

$\xi^P = +1$

Ферми и Бозе простори стања представљају просторе једнодимензионих репрезентација групе пермутација S_N:

Ферми: алтернативна репрезентација

Бозе: тривијална репрезентација

Нормирање $|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle$:

$$|a, a\rangle = \sqrt{2}\left(|a\rangle_1 \times |a\rangle_2\right) \rightarrow$$ нису нормирана стања (за бозоне)

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle = ?$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N \rangle =$$

$$\begin{vmatrix} \langle \varphi_1|\psi_1\rangle & \cdots & \langle \varphi_1|\psi_N\rangle \\ \langle \varphi_2|\psi_1\rangle & & \\ & & \\ \langle \varphi_N|\psi_1\rangle & & \langle \varphi_N|\psi_N\rangle \end{vmatrix} = \sum_P \xi^P \langle \varphi_1|\psi_{P(1)}\rangle \cdots \langle \varphi_N|\psi_{P(N)}\rangle$$

Прост пример:

$$\left(\langle\varphi_1|_1 \times \langle\varphi_2|_2 \pm \langle\varphi_2|_1 \times \langle\varphi_1|_2\right)\left(|\psi_1\rangle_1 \times |\psi_2\rangle_2 \pm |\psi_2\rangle_1 |\psi_1\rangle_2\right) =$$

$$= \langle\varphi_1|\psi_1\rangle_1 \langle\varphi_2|\psi_2\rangle_2 + \langle\varphi_2|\psi_2\rangle_1 \langle\varphi_1|\psi_1\rangle_2 \pm \langle\varphi_1|\psi_2\rangle_1 \langle\varphi_2|\psi_1\rangle_2 \pm \langle\varphi_2|\psi_1\rangle_1 \langle\varphi_1,\psi_2\rangle_2$$

(нема потребе разликовати $\langle\ \rangle_1$ и $\langle\ \rangle_2$ јер су идентични Хилбертови простори)

$$= 2\left(\langle\varphi_1|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\psi_2\rangle \pm \langle\varphi_1|\psi_2\rangle\langle\varphi_2|\psi_1\rangle\right)$$

тј. свако са сваким уз знак пермутације.

Доказ: $\langle \varphi_1, \varphi_2 \dots, \varphi_N | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N \rangle$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P \sum_Q \xi^P \xi^Q \left(\langle\varphi_{P(1)}| \times \dots \times \langle\varphi_{P(N)}|\right)\left(|\psi_{Q(1)}\rangle \times \dots \times |\psi_{Q(N)}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P \sum_Q \xi^P \xi^Q \langle\varphi_{P(1)}|\psi_{Q(1)}\rangle \cdots \langle\varphi_{P(N)}|\psi_{Q(N)}\rangle$$

↓ нови распоред али парови остају исти за фиксирано P и Q

$$= \frac{1}{N!}\sum_P \sum_Q \xi^P \xi^Q \langle\varphi_1|\psi_{P^{-1}Q(1)}\rangle \cdots \langle\varphi_N|\psi_{P^{-1}Q(N)}\rangle$$

$\xi^P = \xi^{P^{-1}}$

$$= \underbrace{\frac{1}{N!}\sum_P}_{1} \sum_{Q \to P^{-1}Q = R} \xi^{P^{-1}Q} \langle\varphi_1|\psi_{P^{-1}Q(1)}\rangle \cdots \langle\varphi_N|\psi_{P^{-1}Q(N)}\rangle$$

$$= \sum_R \xi^R \langle\varphi_1|\psi_{R(1)}\rangle \cdots \langle\varphi_N|\psi_{R(N)}\rangle \quad \checkmark$$

(g) Нормализација $|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N\rangle$:

Претпоставимо $\{|\alpha_i\rangle,\ i = 1, \ldots;\ \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle = \delta_{kj}\}$

тј. једночестични (ортонормирани) базис у $\mathcal{H}_{(1)}$

1. фермиони: $|\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}\rangle$

$$\langle\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}|\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix}_- = 1$$

(већ нормиране) Slater детерминанте

2. бозони $|\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}\rangle$: уредимо низ $\alpha_{(i)}$ тако да су иста стања једна поред другог поређана што даје исто многочестично стање $\Rightarrow$

$$\langle\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}|\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{vmatrix}_+ = \prod_{k=1}^{n} (n_k!)$$

где n - број различитих стања са индексом k: $k = 1, \ldots, n$ која улазе у опис перманенте $|\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}\rangle$ и која се појављују n_k пута

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} n_k = N,$$

$\rightarrow$ нормирано стање:

$$\boxed{|\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(N)}\rangle \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n_k!}}}$$

Пример $|a, a\rangle$: $\langle a, a|a, a\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2!$

$\frac{1}{\sqrt{2!}}|a, a\rangle$ је нормирано стање.

(Б) Репрезентација попуњености (стања)

- Уместо праћења и фиксирања броја честица и бриге о (анти) симетризацији говоримо о попуњености нивоа честица

Оператори једноставнији!

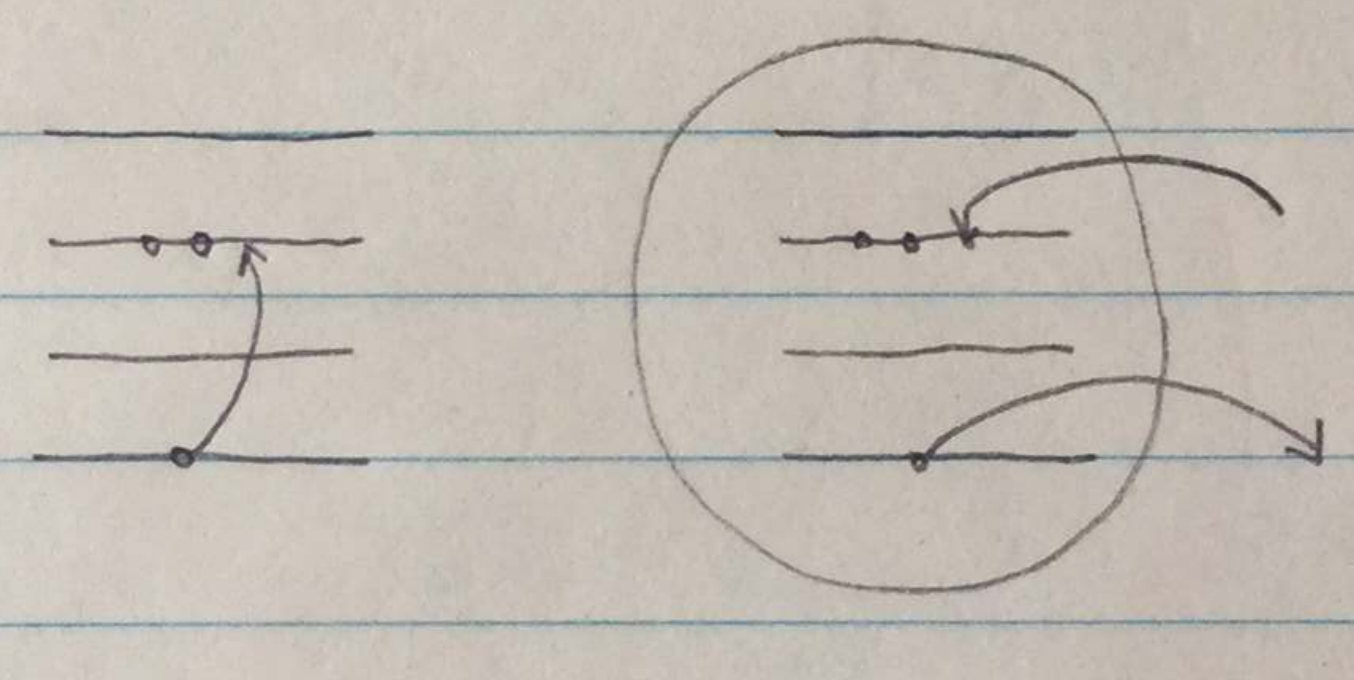
- Честице могу да буду креиране и одстрањене (уништене)

→ Вишечестични простор (Фоков):

$$|\Psi\rangle = |\Psi^{(0)}\rangle + |\Psi^{(1)}\rangle + |\Psi^{(2)}\rangle + \cdots$$

$|\Psi^{(N)}\rangle$ – стање са N честица

$\langle\Psi^{(N)}|\Psi^{(M)}\rangle \sim \delta_{M,N}$ – ортогонална стања са различитим бројем честица



(а) Креациони и анихилациони оператори:

$|\varphi\rangle$ – једночестично стање

$|\varphi_1, \ldots, \varphi_N\rangle$ – перманента или детерминанта

$a^+(\varphi)|\varphi_1, \ldots, \varphi_N\rangle = |\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\rangle$ креациони оператор

$a(\varphi)$ → адјунтовани   анихилациони оператор

$\Longrightarrow$

$$\langle \chi_1,\dots,\chi_{N-1}|a(\varphi)|\psi_1,\dots,\psi_N\rangle = \langle \psi_1,\dots,\psi_N|a^+(\varphi)|\chi_1,\dots,\chi_{N-1}\rangle^*$$

$$= \langle \psi_1,\dots,\psi_N|\varphi,\chi_1,\dots,\chi_{N-1}\rangle^* =$$

$$= \begin{vmatrix} \langle\psi_1|\varphi\rangle & \langle\psi_1|\chi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\chi_{N-1}\rangle \\ & & & \\ \langle\psi_N|\varphi\rangle & & & \langle\psi_N|\chi_{N-1}\rangle \end{vmatrix}_\xi^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \xi^{k-1} \langle\psi_k|\varphi\rangle^* \begin{vmatrix} \langle\psi_1|\chi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\chi_{N-1}\rangle \\ & \text{no } \psi_k & \\ \langle\psi_N|\chi_1\rangle & & \langle\psi_N|\chi_{N-1}\rangle \end{vmatrix}_\xi^*$$

$$\Rightarrow \quad a(\varphi)|\psi_1,\dots,\psi_N\rangle = \sum_{k=1}^{N} \xi^{k-1} \langle\varphi|\psi_k\rangle |\psi_1,\dots \text{no } \psi_k \dots,\psi_N\rangle$$

применујући деф a^+ $\Rightarrow$

$$[a^+(\varphi_1), a^+(\varphi_2)]_{-\xi} = 0$$

адјунговано $\Rightarrow$

$$[a(\varphi_1), a(\varphi_2)]_{-\xi} = 0$$

(б)

$$[a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)]_{-\xi} = ?$$

$$a(\varphi_1)a^+(\varphi_2)|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle = a(\varphi_1)|\varphi_2,\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle$$

$$= \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle + \sum_{k=1}^{N}\xi^{k}\langle\varphi_1|\psi_k\rangle|\varphi_2,\psi_1,\text{no}\,\psi_k\ldots,\psi_N\rangle$$

$$a^+(\varphi_2)a(\varphi_1)|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle = \sum_{k=1}^{N}\xi^{k-1}\langle\varphi_1|\psi_k\rangle|\varphi_2,\psi_1,\text{no}\,\psi_k\ldots,\psi_N\rangle$$

$$\Longrightarrow$$

$$[a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)]_{-\xi} = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle$$

(в) конкретно:

једночестични базис $\{|\alpha_k\rangle, k=1,\ldots\ ;\ \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle = \delta_{kj}\}$

1. бозони

базис у репрезентацији попуњености:

$$|n_1 n_2 \cdots\rangle = \frac{|\alpha_1\alpha_1\cdots\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_2\cdots\rangle}{\sqrt{n_1!}\,\sqrt{n_2!}\cdots}$$

$\Longrightarrow$ анихилациони и креациони оператори:

$$a_i|n_1 n_2\cdots n_i\cdots\rangle \underset{\substack{n_i \text{ пута}\\ \text{анихилација}}}{=} \sqrt{n_i}\,|n_1 n_2\cdots(n_i-1)\cdots\rangle$$

$$a_i^+|n_1 n_2\cdots n_i\cdots\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|n_1 n_2\cdots(n_i+1)\cdots\rangle$$

2. фермиони

$|\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(n)}\rangle$ (стања $\alpha_{(i)}$ $i = 1, \dots, n$ попуњена)

$$a_\alpha |\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(n)}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \zeta^{i-1} \langle \alpha | \alpha_{(i)} \rangle |\alpha_{(1)} \dots \text{но } \alpha_{(i)} \dots \alpha_{(n)}\rangle$$

$$a_\alpha^+ |\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(n)}\rangle = |\alpha, \alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(n)}\rangle$$

у репрезентацији попуњености:

$|n_1 n_2 \dots n_i \dots\rangle \qquad \forall i \; n_i = 0 \lor n_i = 1$

$$a_i |n_1 n_2 \dots n_i \dots\rangle = \delta_{n_i,1} (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} n_k} |n_1 n_2 \dots (n_i = 0) \dots\rangle$$

$$a_i^+ |n_1 n_2 \dots n_i \dots\rangle = \delta_{n_i,0} (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} n_k} |n_1 n_2 \dots (n_i = 1) \dots\rangle$$

(I) стања у репрезентацији попуњености у $\{|\alpha_k\rangle, k = 1, \dots; \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle = \delta_{kj}\}$:

$|n_1, n_2, \dots\rangle$ се могу представити деловањем креационих оператора

фермиони:

$$a^+(\alpha_{(1)}) a^+(\alpha_{(2)}) \dots a^+(\alpha_{(n)}) |0\rangle$$

бозони:

$$\frac{[a^+(\alpha_{(1)})]^{n_{(1)}}}{\sqrt{n_{(1)}!}} \frac{[a^+(\alpha_{(2)})]^{n_{(2)}}}{\sqrt{n_{(2)}!}} \dots \frac{[a^+(\alpha_{(m)})]^{n_{(m)}}}{\sqrt{n_{(m)}!}} |0\rangle$$

и представљају стања могућег базиса (репрезентације) у Фоковом простору

$\{|\alpha_k\rangle\}$ често бирамо као eigen-стања импулса $\to \{|\vec{p}\rangle\}$

Фоков простор у случају фермиона је изграђен од стања:

$$a^+(p_1)\, a^+(p_2) \cdots a^+(p_n)|0\rangle$$

$\{|\vec{p}\rangle\}$ стања су нормирана: $\langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

тј. $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{x}}$ јер $\int d\vec{x}\, e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

Могућа је и нормализација: $\langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
коју у даљем користимо. (Feynman, Statistical Mechanics)

(B) Оператори у другој квантизацији

(једночестични и двочестични) (како избећи операторе $\sum_{i=1}^{N} H_i$ итд. ако већ имамо исте $\mathcal{H}_i$)

(a) Једночестични оператори

$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \times \cdots \times |\psi_n\rangle$ стање у различивој слици

$$A|\psi\rangle = (A|\psi_1\rangle)\times|\psi_2\rangle\times\cdots\times|\psi_n\rangle + |\psi_1\rangle\times(A|\psi_2\rangle)\times\cdots\times|\psi_n\rangle + \cdots + |\psi_1\rangle\times|\psi_2\rangle\times\cdots\times(A|\psi_n\rangle)$$

једночестични оператор

$\delta A = |\alpha\rangle\langle\beta|$, $|\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle$ је детерминанта или перманента стања уведена раније

$$\delta A|\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\beta|\psi_i\rangle|\psi_1,\ldots,\psi_{i-1},\alpha,\psi_{i+1},\ldots,\psi_n\rangle$$

$$a^+(\alpha)a(\beta)|\psi_1,\psi_2,\ldots\psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi^{i-1}\langle\beta|\psi_i\rangle|\alpha,\psi_1,\ldots,\psi_{i-1},\psi_{i+1},\ldots,\psi_n\rangle$$

$\Rightarrow$ $\delta A \longleftrightarrow a^+(\alpha)\,a(\beta)$ идентично деловање оператора

Уопште: „друга квантизација" (bra, ket → оператори)

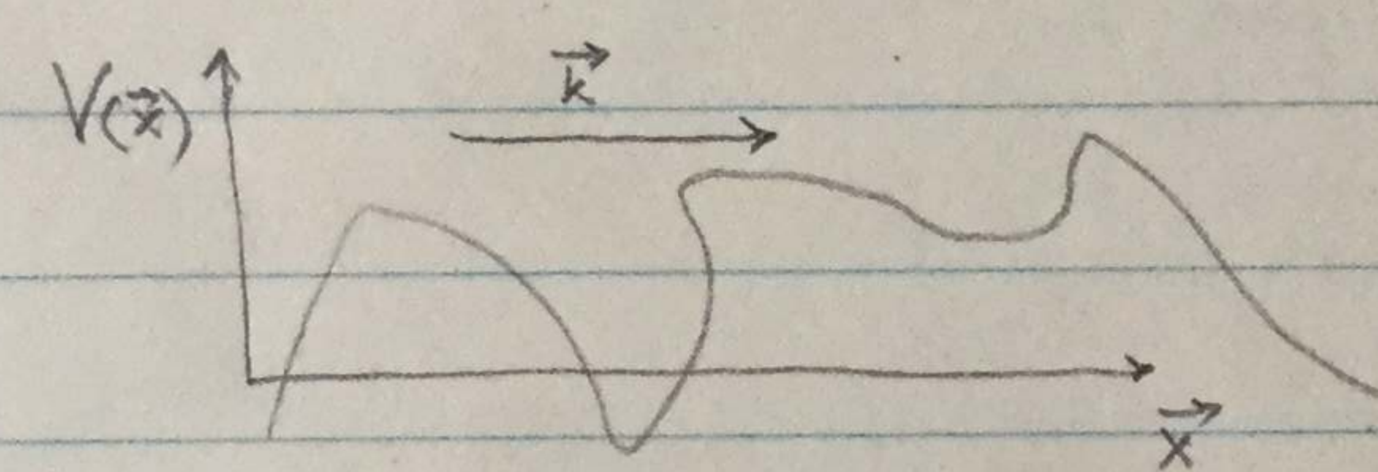
$$A = \sum_{\alpha,\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|A|\beta\rangle\langle\beta| \longrightarrow \sum_{\alpha,\beta} a^+(\alpha)\langle\alpha|A|\beta\rangle\, a(\beta)$$

Примери:

1. $A = I \quad \Rightarrow \quad \hat{N} = \sum_{\alpha} a^+(\alpha)\,a(\alpha)$ оператор броја честица

2. $A = \vec{p}$ $\quad \hat{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p}\, a^+(\vec{p})\,a(\vec{p})$ оператор импулса
   $\{|\vec{p}\rangle ;\ \vec{p}\}$

3. $\{|\vec{x}\rangle ;\ \vec{x}\}$ $\quad \hat{V} = \int d\vec{x}\, V(\vec{x})\, a^+(\vec{x})\, a(\vec{x})$ једночестични потенцијал

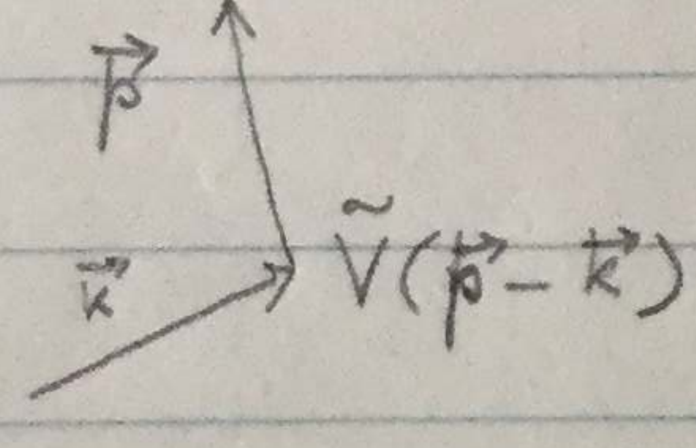


Шта се догађа са честицом са импулсом $\vec{k}$?

$$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,|\vec{p}\rangle\, e^{-i\vec{x}\vec{p}} \xrightarrow{\text{„друга квантизација"}} a^+(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\vec{x}\vec{p}}\, a^+(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \quad \hat{V} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \tilde{V}(\vec{k}-\vec{p})\, a^+(\vec{p})\, a(\vec{k})$$

где $\tilde{V}(\vec{k}-\vec{p}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{x}(\vec{p}-\vec{k})}\, V(\vec{x})$



Ако је $V(\vec{x}) = const$ онда представља хемијски потенцијал (удео) а ако није догађа се нетривијални прелаз у стање импулса $\vec{p}$ са амплитудом $\sim \tilde{V}(\vec{k}-\vec{p})$

(б) Двочестични оператор

у првој квантизацији:

$$V|\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\underbrace{|\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\rangle}$$

n честица где у бозонском случају може бити $\vec{x}_i=\vec{x}_j \dots$

у другој квантизацији постаје:

$$\hat{V}=\frac{1}{2}\int d\vec{x}\int d\vec{y}\; a^+(\vec{x})a^+(\vec{y})\,V(\vec{x},\vec{y})\,a(\vec{y})a(\vec{x})$$

Доказ:

$$a(y)a(x)|\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\rangle = a(y)\sum_{i=1}^{n}\varsigma^{i-1}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)|\vec{x}_1,\dots,\text{no }\vec{x}_i,\dots\vec{x}_n\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varsigma^{i-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\varsigma^{j-1}\eta^{ji}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x}_j)\,|\vec{x}_1,\dots,\text{no }\vec{x}_i,\text{no }\vec{x}_j\dots\vec{x}_n\rangle$$

$$\eta^{ji}=\begin{cases}1 & \text{ако } j<i\\ -1 & \text{ако } j>i\end{cases}$$

$a^+(x)a^+(y)a(y)a(x) =$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varsigma^{i-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\varsigma^{j-1}\eta^{ji}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x}_j)\,|\vec{x}_i,\vec{x}_j,\vec{x}_1,\dots,\text{no }\vec{x}_i,\text{no }\vec{x}_j\,\vec{x}_n\rangle$$

интеграцијом по $\vec{x}$ и $\vec{y}$ долазимо до почетног израза у првој квантизацији

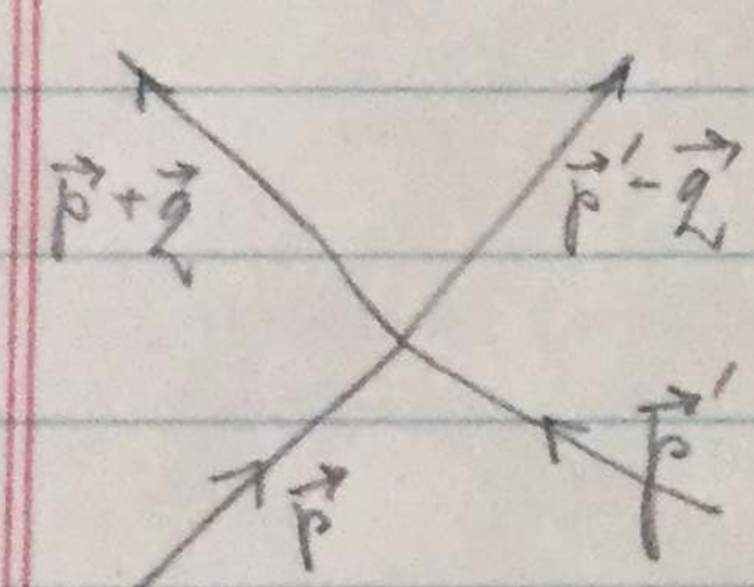
1. Важно је да уочимо a^+a^+aa распоред јер $a^+a\,a^+a$ (иако до на разлику $\sim a^+a$ даје a^+a^+aa) има једночестични удео ($\langle 0|a(a^+aa^+a)a^+|0\rangle\neq 0$)

2. Важан случај када разматрамо транслаторно инваријантну интеракцију: $V(\vec{x}-\vec{y})$

$$V = \frac{1}{2}\int d\vec{x}\int d\vec{y}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3}\; e^{-i\vec{k}\vec{x}}e^{-i\vec{k}'\vec{y}}\,V(\vec{x}-\vec{y})\,e^{i\vec{p}'\vec{y}}e^{i\vec{p}\vec{x}}$$
$$\cdot\, a^+(\vec{k})\,a^+(\vec{k}')\,a(\vec{p}')\,a(\vec{p})$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3}\cdot(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}+\vec{p}'-\vec{k}-\vec{k}')\cdot\int d\vec{r}\;V(\vec{r})\,e^{i(\vec{p}-\vec{k})\vec{r}}$$
$$\cdot\, a^+(\vec{k})\,a^+(\vec{k}')\,a(\vec{p}')\,a(\vec{p})$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\;\underbrace{\int d\vec{r}\;V(\vec{r})\,e^{-i\vec{q}\vec{r}}}_{=\tilde{V}(\vec{q})}\cdot\, a^+(\vec{p}+\vec{q})\,a^+(\vec{p}'-\vec{q})\,a(\vec{p}')\,a(\vec{p})$$



Тотални импулс задржава исту вредност: $\vec{p}+\vec{p}'$!

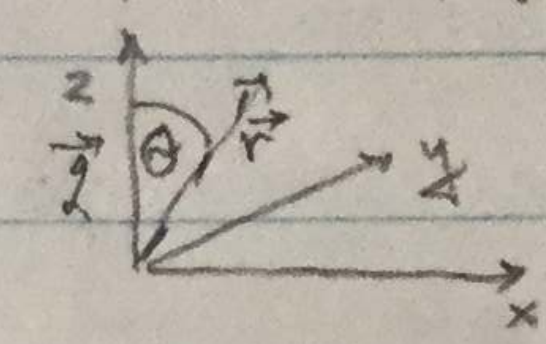
$$\hat{V} = \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\;\tilde{V}(\vec{q})\;a^+(\vec{p}+\vec{q})\,a^+(\vec{p}'-\vec{q})\,a(\vec{p}')\,a(\vec{p})$$

3. Ако честице имају спин и интеракција не зависи од спина: $V(\vec{x}-\vec{y})$
(враћањем се у координатну репрезентацију закључујемо $\Rightarrow$)

$$\boxed{\hat{V} = \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\tilde{V}(\vec{q})\;a^+_{\sigma_1}(\vec{p}+\vec{q})\,a^+_{\sigma_2}(\vec{p}'-\vec{q})\,a_{\sigma_2}(\vec{p}')\,a_{\sigma_1}(\vec{p})}$$

Пример: Coulomb потенцијал $V(\vec{x}-\vec{y}) \sim \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

= „дугодометна" интеракција!



$$\tilde{V}(\vec{q}) \sim \int d\vec{r}\, \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{r}$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, r^2\, \frac{1}{r}\, e^{iqr\cos\theta}$$

$d\theta \sin\theta = d(-\cos\theta)$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr\, \frac{1}{iq}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)$$

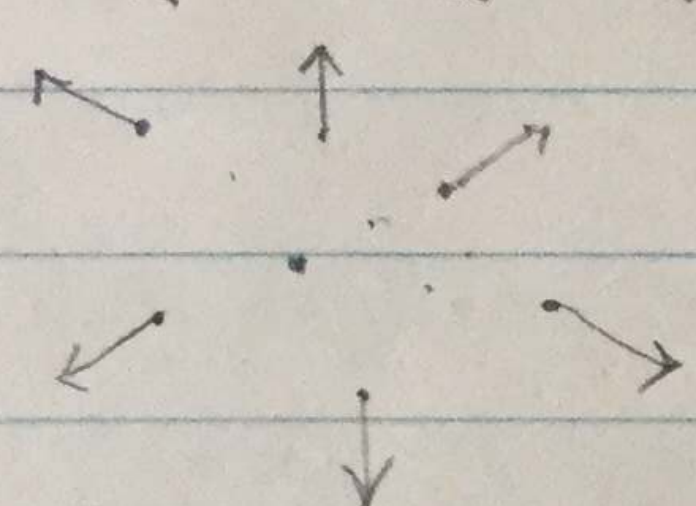
неодређен интеграл

дампамо зато $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r} e^{-\mu r}$

$$\tilde{V}_\mu(q) \sim \frac{1}{iq}\left(-\frac{1}{iq-\mu} + \frac{1}{-iq-\mu}\right) \sim \frac{1}{q^2+\mu^2} \xrightarrow{\mu \to 0} \frac{1}{q^2}$$

сингуларитет за $q = 0$

Физички систем нестабилан!
(= последица дугодометне интеракције.)



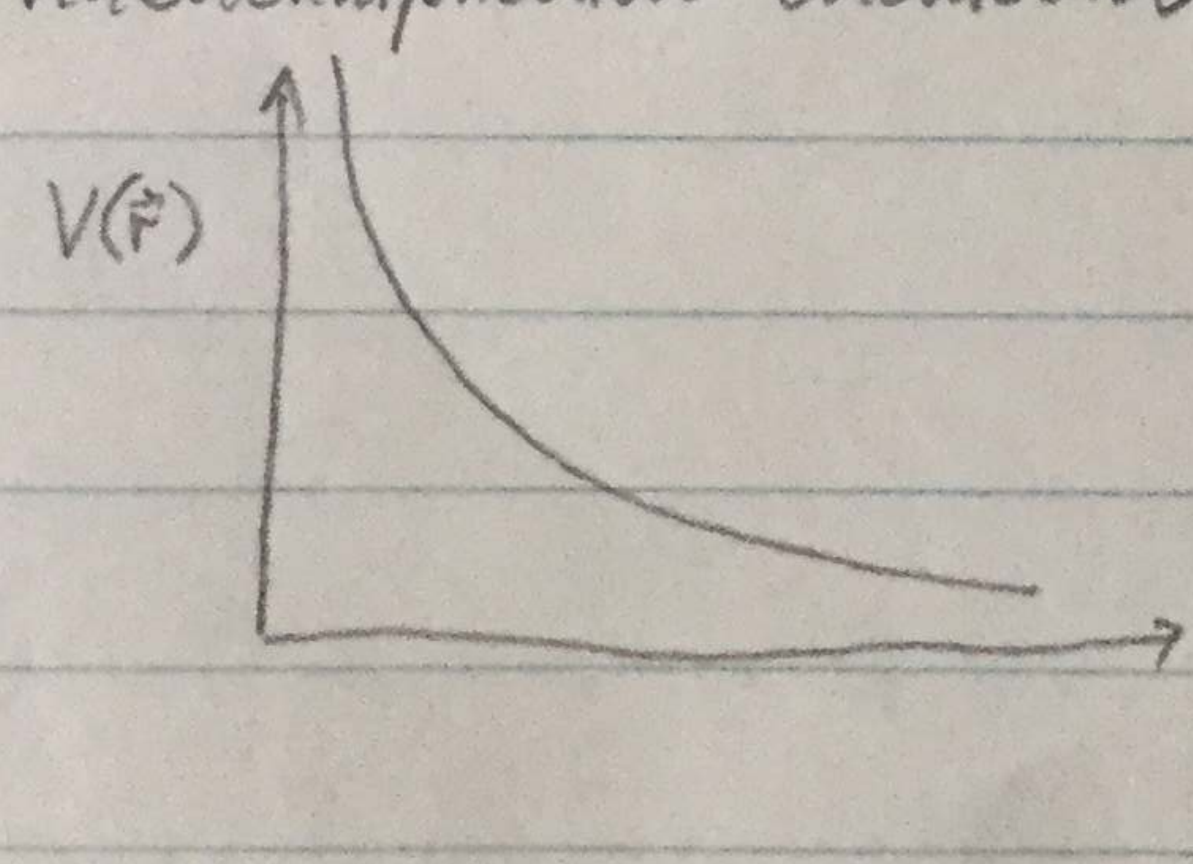
Ако је систем електрона потребна су позитивна наелектрисања. Једна могућност је позадина са униформном густином позитивног наелектрисања = средња густина наелектрисања електронског система $\bar{\rho}$

$$\hat{V}: \rho(x)\rho(y) \to (\rho(x)-\bar{\rho})(\rho(y)-\bar{\rho})$$

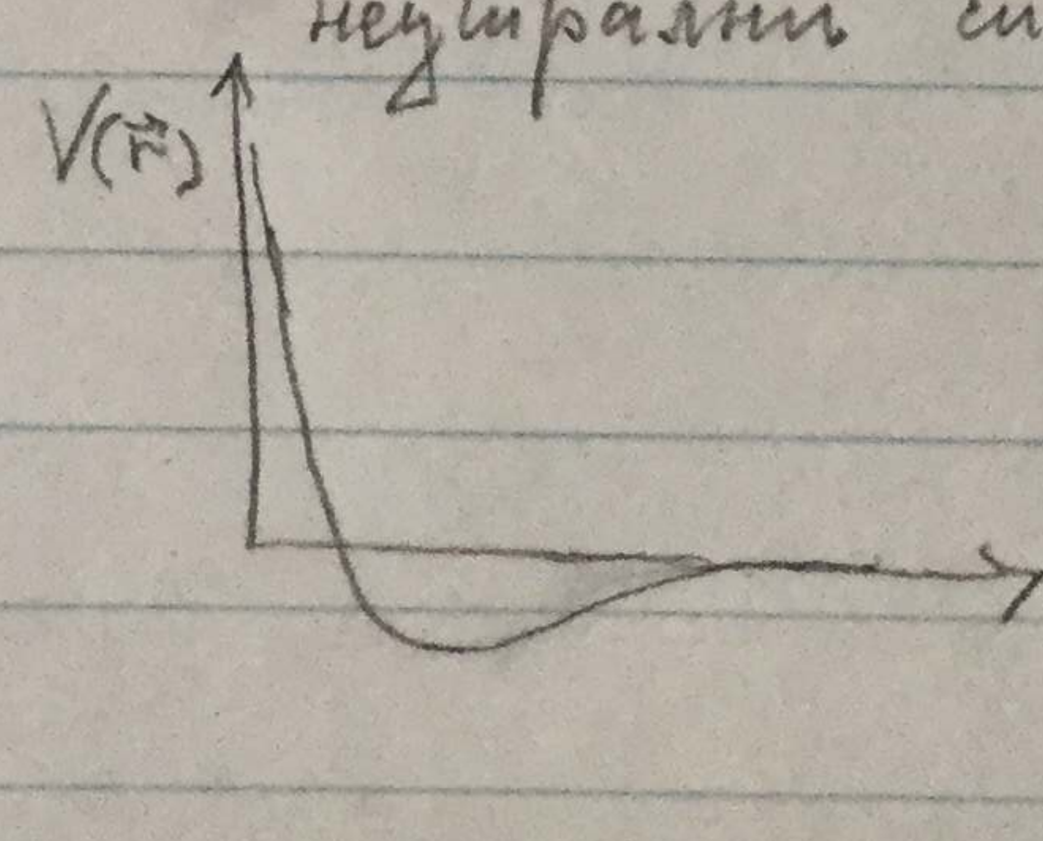
Детаљније у Fetter, Walecka: коначан систем запремине L^3:

$$\hat{V} \to \sum_{\substack{\vec{p},\vec{p}' \\ \vec{q}\neq 0!}} \tilde{V}(\vec{q})\, a^+ a^+ a a$$

наелектрисани системи



неутрални системи:



атоми,
квантне течности (He^4, He^3)

(Г) Важност друге квантизације

то је „језик многочестичних система"

(иако и функционални запис и таласне функције су важни)

и важна је за успостављање пертурбативног развоја у многочестичној физици.

(а) Хајзенбергова слика

КМ: Шредингерова слика: Вектори стања зависе од времена, а оператори (правила везани за физичке величине) обично не зависе од времена.

Претпоставимо да H не зависи експлицитно од времена.

$$\hbar = 1: \quad i\frac{\partial|\Psi_s\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi_s\rangle \longrightarrow |\Psi_s(t)\rangle \equiv |\Psi_s\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\Psi_s(t=0)\rangle$$

$$\left(\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \Rightarrow i\frac{\partial\langle E_n|\Psi_s\rangle}{\partial t} = \langle E_n|\Psi_s\rangle \Rightarrow |\Psi_s\rangle = \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|\Psi_s\rangle = \sum_n |E_n\rangle e^{-iE_n t}\langle E_n|\Psi_s(0)\rangle\right)$$

Хајзенбергова слика:

$$\langle\Psi_s(t)|O_s|\Psi_s(t)\rangle = \langle\Psi_H|O_H|\Psi_H\rangle$$

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\,\hat{O}_s\,e^{-i\hat{H}t} \Rightarrow$$

$$\boxed{i\frac{\partial\hat{O}_H(t)}{\partial t} = [\hat{O}_H(t), \hat{H}]}$$

једначина кретања оператора физичке величине који је сада ближи поимању физичке величине у класичној физици. Пример: једначина за $\hat{\rho}_H(t) = a^+_H(\vec{x},t)\,a_H(\vec{x},t)$

$(a_H(\vec{x},t) = e^{i\hat{H}t}a(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}$, etc)

$$\Rightarrow \frac{\partial\hat{\rho}_H(t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_H(t) = 0 \text{ etc.}$$

(б) Поставка пертурбационог развоја

$$\hat{a}(x) \rightarrow \hat{\Psi}(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \hat{a}_{\vec{k}} \,, \qquad \hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\Psi}^0_H(\vec{x}, t) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_{\vec{k}} t} \hat{a}_{\vec{k}}$$

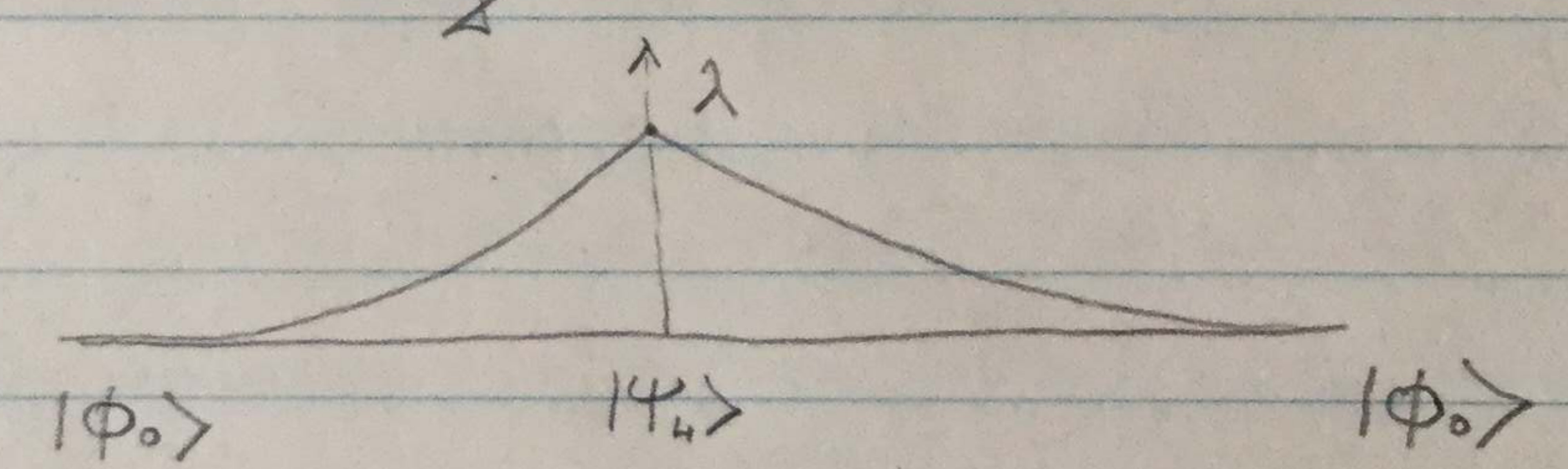
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda H_1 \qquad \lambda < 1$$

$\Rightarrow$ пертурбативан развој по λ у КМ

Ако контролишемо са временом пертурбацију: $\lambda = e^{-\epsilon |t|}$

H_0 када $t \rightarrow \pm\infty$

H када $t = 0$



. . . Fetter, Walecha $\quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow$

$$\langle \Psi_H | T[O_H(t) O_H(t')] | \Psi_H \rangle \sim \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \!\!\cdots\! \int \underbrace{\langle T[H_1^{H_0}(t_1) \cdots H_1^{H_0}(t_n) O^0_H(t) O^0_H(t')\rangle_0}_{\text{корелатор у неинтерагујућем (непертурбованом) систему}}$$

временско уређење

$t > t' \rightarrow O_H(t) O_H(t')$

$t' > t \rightarrow O_H(t') O_H(t)$

корелациона функција

$\downarrow$

„функција одзива“:

ако O_H магнетизација $\rightarrow$ сусцептибилност

ако O_H струја $\rightarrow$ проводност, Холова проводност, термална проводност

ако O_H густина $\rightarrow$ компресибилност

израчунато у Хајзенберговој слици

ЛИТЕРАТУРА:

1. Feynman, Statistical Mechanics
2. Fetter, Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems

I. Задаци - Друга квантизација

I.1.(1) Квалитативно описати расподелу брзина у једном правцу у систему BEC у хармонијској замци фреквенце $\omega_\perp$ у xy равни и $\omega_\parallel$ у z правцу. Претпоставити Бозе гас неинтерагујућих атома масе m на температури T. Погледати wikipedia: Bose-Einstein condensate.

I.2.(2) Описати основно стање тј. таласну функцију једнодимензионог система са три фермиона који не интерагују али су у хармонијској замци. Претпоставити да су фермиони без спинског степена слободе. Погледати: Vandermonde детерминанта.

I.3.(3) Разматрати фермионски систем спина $\frac{1}{2}$ са само једним стањем енергије ϵ. Хамилтонијан је дат изразом:

$$\hat{H} = \sum_\sigma \epsilon c^\dagger_\sigma c_\sigma + \Delta c^\dagger_\uparrow c^\dagger_\downarrow + \Delta c_\downarrow c_\uparrow$$

Наћи комутатор $[\hat{H}, \hat{N}]$ где $\hat{N} = \sum_\sigma c^\dagger_\sigma c_\sigma$ и решити eigen-проблем.

I.4.(4) Разматрати померени хармонијски осцилатор,

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + kx$$

у репрезентацији креационих и анихилационих оператора

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right), \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right).$$

Наћи $[\hat{H}, \hat{N}]$ где $\hat{N} = b^\dagger b$.

Наћи померај d комплетирањем квадрата координате у $\hat{H}$ и (нова) eigen-стања примењујући оператор транслације $e^{id\hat{p}}$.

Описати их у eigen-базису $\hat{N}$.