Idealni kvantni gasovi

1. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N bozona spina 0 koji se nalaze u d-dimenzionalnom sudu zapremine V. Zavisnost jednočestične energije ε od impulsa $\mathbf{p}$ (disperziona relacija) je oblika $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \alpha\, p^s$, gde je $p = |\mathbf{p}|$ intenzitet impulsa, α pozitivna konstanta odgovarajućih dimenzija, dok je $s > 0$.
   (a) Izračunati *jednočestičnu gustinu stanja* $g(\varepsilon)$, koja se definiše izrazom $g(\varepsilon) = \sum_f \delta(\varepsilon - \varepsilon_f)$, gde su ε_f energije jednočestičnih stanja prebrojanih kvantnim brojevima f.
   (b) U zavisnosti od dimenzionalnosti d i eksponenta s, ispitati kada se fenomen Bose–Einsten kondenzacije dešava na konačnoj temperaturi T_c, a kada se dešava tek na $T_c = 0$. U prvom slučaju, odrediti temperaturu Bose–Einstein kondenzacije u funkciji N, V, α, d i s.
   (c) U slučaju $T_c > 0$, odrediti frakciju bozona u kondenzatu N_0/N, energiju E i toplotni kapacitet C_V gasa na temperaturama $T < T_c$.

2. U zadatku 1 posebno razmotriti fizički relevantan slučaj $d = 3$, $s = 2$, i pokazati da je skok izvoda toplotnog kapaciteta u tački $T = T_c$ dat kao
$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T=T_c+0} - \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T=T_c-0} = -\frac{27}{16\pi}[\zeta(3/2)]^2\frac{Nk_B}{T_c}.$$

3. Posmatrajmo idealni gas fotona u zapremini V (trodimenzionalni prostor) i na temperaturi T. Disperziona relacija fotona je $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar c|\mathbf{k}|$, gde je $\mathbf{k}$ talasni vektor fotona. Izračunati Helmholtzovu slobodnu energiju F, entropiju S, unutrašnju energiju U i toplotni kapacitet C_V.

4. Naći prvu kvantnu korekciju jednačine stanja klasičnog idealnog gasa (N čestica u trodimenzionalnoj zapremini V) na visokim temperaturama T, kada je ispunjen uslov $n\lambda_T^3 \ll 1$, gde je λ_T termalna talasna dužina.

5. Pokazati da u limesu $\xi \gg 1$ važi tzv. Sommerfeldov razvoj
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{x-\xi}+1} = \int_0^{\xi} \mathrm{d}x\, f(x) + \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=\xi} + \frac{7\pi^4}{360}\left(\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=\xi} + \ldots$$

6. Posmatrajmo degenerisani idealni elektronski gas ($k_BT \ll \varepsilon_F$) koji se sastoji od N elektrona i koji se nalazi u magnetnom polju jačine H, pri čemu je ispunjen uslov $\mu_B H \ll k_BT$.[1] Izračunati deo magnetne susceptibilnosti gasa koji potiče od interakcije spinskog stepena slobode sa magnetnim poljem (tzv. Paulijeva paramagnetna susceptibilnost χ_{P}). Rezultat predstaviti u obliku $\chi_P(T) = \chi_P(0)\left[1 + a\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^b\right]$, gde je $\chi_P(0)$ Paulijeva paramagnetna susceptibilnost na apsolutnoj nuli, dok su a i b realne konstante.

7. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N ultrarelativističkih elektrona u zapremini V i na temperaturi T. Disperziona relacija za ultrarelativističke elektrone je oblika $\varepsilon_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|$, gde je $\mathbf{p}$ impuls, dok je c brzina svetlosti.
   (a) Pokazati da je na svim temperaturama pritisak gasa p proporcionalan gustini unutrašnje energije u, $p = \mathrm{const}\cdot u$. Naći konstantu proporcionalnosti.
   (b) Odrediti Fermijevu energiju ε_F i izraziti energiju gasa na $T = 0$ u funkciji Fermijeve energije.
   (c) Naći entropiju S i toplotni kapacitet C_V na niskim temperaturama T, $k_BT \ll \varepsilon_F$.

8. Posmatrajmo idealni dvodimenzionalni elektronski gas koji se sastoji od N elektrona koji zauzimaju oblast dvodimenzionalnog prostora površine A.
   (a) Izračunati Fermijevu energiju ε_F i naći energiju gasa na $T = 0$ u funkciji Fermijeve energije.
   (b) Izračunati jednočestičnu gustinu stanja $g(\varepsilon)$. Uporediti dobijeni rezultat sa rezultatom za jednočestičnu gustinu stanja idealnog elektronskog gasa u tri dimenzije.
   (c) Naći hemijski potencijal μ na proizvoljnoj temperaturi T.
   Pomoć: U integralu koji treba rešiti, pogodno je uvesti smenu $\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} = x$, gde je ε jednočestična energija.
   (d) Koristeći rezultat dela zadatka (c), odrediti hemijski potencijal u graničnim slučajevima niskih ($k_BT \ll \varepsilon_F$) i visokih ($k_BT \gg \varepsilon_F$) temperatura. Uporediti rezultat koji se dobija u limesu niskih temperatura sa rezultatom koji bi se dobio primenom Sommerfeldovog razvoja. Komentarisati ponašanje hemijskog potencijala na visokim temperaturama.

[1] Ovaj uslov nam omogućava da efekte koji potiču od interakcije spinskog i orbitnog stepena slobode sa magnetnim poljem razmatramo odvojeno.