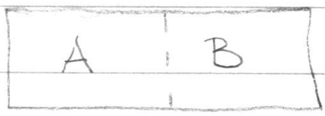
II Статистички оператор

(А) Матрица густине у КМ

(а) Entanglement

Систем од два подсистема A и B, сваки подсистем може бити у два стања $|+\rangle_{A(B)}$, $|-\rangle_{A(B)}$

(два различита атома са два стања: основно и побуђено)



$$|\Psi\rangle = |+\rangle_A \times |-\rangle_B$$

али стање са entanglement-ом!

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A \times |-\rangle_B + |-\rangle_A \times |+\rangle_B\right)$$

Да ли је стање са entanglement-ом

$$|\Psi\rangle \propto \left(|+\rangle_A \times |-\rangle_B + |+\rangle_A \times |+\rangle_B + |-\rangle_A \times |-\rangle_B + |-\rangle_A \times |+\rangle_B\right) \;?$$

$$|\Psi\rangle = \left(|+\rangle_A + |-\rangle_A\right) \times \left(|+\rangle_B + |-\rangle_B\right) \quad \text{Не!}$$

Потреба за начин што би независно од базиса описивао подсистем: Да ли је entangled и на који начин?

(б) $|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle\rangle$, $\{|A\rangle\}$ $\{|B\rangle\}$ ортонормирани базиси

$$\langle\langle\Psi| O_A \times I_B |\Psi\rangle\rangle = \sum_B \langle\langle\Psi|B\rangle\, O_A\, \langle B|\Psi\rangle\rangle$$

$$= \sum_{A,A'} \sum_B \langle\langle\Psi|B\rangle|A\rangle\langle A|O_A|A'\rangle\langle A'|\langle B|\Psi\rangle\rangle$$

$$= \sum_{A,A'} \langle A|O_A|A'\rangle\langle A'| \sum_B \langle B|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi|B\rangle|A\rangle$$

$$= \mathrm{tr}\left(O_A \rho_A\right) \qquad \rho_A = \mathrm{tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

„матрица густине"

Пример: $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A |+\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B\right)$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A |-\rangle_B + |-\rangle_A |+\rangle_B\right)$$

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B |1\rangle\langle 1| = \mathrm{tr}_B |2\rangle\langle 2| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

Опис подсистема исти.

Може бити $50\%\ |+\rangle$ и $50\%\ |-\rangle$

али и $50\%\ \frac{(|+\rangle+|-\rangle)}{\sqrt{2}}$ и $50\%\ \frac{(|+\rangle-|-\rangle)}{\sqrt{2}}$

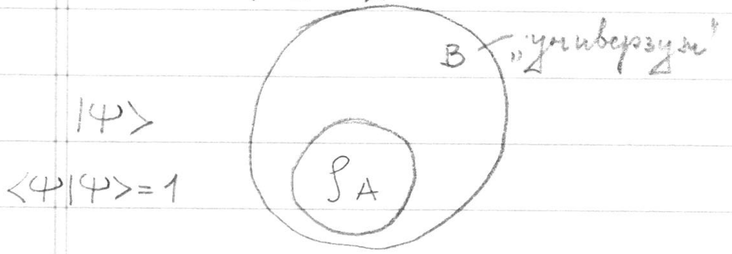
или $\frac{1}{3}\left(\frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{1}{3}\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}|+\rangle + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \ldots}{\sqrt{2}}\right.$

и $\frac{1}{3}$ удела $\left(\frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}|+\rangle + e^{i\frac{2\pi}{3}}|-\rangle}{\sqrt{2}}\right.$,

итд

→ КМ неизвесност – „унутрашња недоступност" кв. информације

(в) Матрица густине – особине



Уобичајено систем је универзум али треба да се користимо матрицом густине

$$\rho_A = \sum_B \langle B|\psi\rangle\langle\psi|B\rangle\ ,\quad |\psi\rangle = \sum_B |\psi\rangle_B \times |B\rangle = \sum_{A,B} C_A^B |A\rangle \times |B\rangle$$

$$\rho_A = \sum_B \sum_{\substack{A',B' \\ A'',B''}} \langle B|B'\rangle |A'\rangle C_{A'}^{*B'} C_{A''}^{B''} \langle A''|\langle B''|B\rangle = \sum_{A',A''} |A'\rangle\langle A''| \left(\sum_B C_{A'}^{*B} C_{A''}^{B} \ldots\right.$$

$$\Rightarrow \langle A'|\rho_A|A''\rangle = \sum_B C_{A'}^{*B} C_{A''}^{B}$$

$\langle A''|\rho_A|A'\rangle^* = \langle A'|\rho_A|A''\rangle$ хермитски оператор

$$\mathrm{tr}\,\rho_A = \sum_A \Big(\underbrace{\sum_B |C_A^B|^2}_{(\langle\psi|\psi\rangle = 1)}\Big) = 1 = \sum_{\tilde{A}} e^{-\lambda_{\tilde{A}}}$$

(Позитивне eigen-вредности мање или једнаке 1)

$$\Rightarrow \quad \rho = \sum_i w_i |i\rangle\langle i|$$

Мера entanglement-а је е. ентропија $S_E = -\sum_i w_i \ln w_i$

Чисто (pure) стање $S_E = 0$ Мешано (mixed) $S_E > 0$

Мера везивања унутрашњих и спољашњих варијабли тј.

„Колико је информација размазана (неодређена) као у теорији информација"

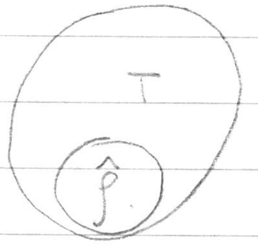
Пример: $|1\rangle, |2\rangle \longrightarrow S_E = \ln 2 \longrightarrow e^{S_E}$ број битова који су увезани

Еволуција матрице густине:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t}\,\hat{\rho}(0)\,e^{i\hat{H}t} \longrightarrow \dot{\rho} = -i\,[\hat{H}, \hat{\rho}]$$

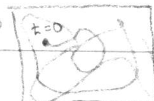
(Б) Статистички оператор

(а)



(1) Претпоставимо да $A+B$ је затворени макроскопски систем, са комплексним интеракцијама (много честица непосредно и посредно интерагује).

(2) Довољно смо дуго чекали да је систем „заборавио" $|\Psi(t=0)\rangle$ $(t \to \infty)$ и да можемо да изнађемо $\hat{\rho}$ на основу статистичке дистрибуције

Пример: 1 честица, класично p 

$\longrightarrow \rho(x,p)$

тј. да смо у термодинамичкој равнотежи: мерене (не микроскопске) величине сваког подсистема су са великом тачношћу дате преко одговарајућег $\hat{\rho}$.

А: задати N, V, размењује E, дошли смо до стационарног стања тј. термодинамичке равнотеже

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0 \Rightarrow [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0$$

узимамо $\hat{\rho} = \dfrac{e^{-\beta \hat{H}}}{tr\, e^{-\beta \hat{H}}}$ као квантни аналог „Гибсове или канонске расподеле"

Питање: Када се „матрица густине" $\hat{\rho}_A$ ($tr\,\hat{\rho}_A = 1$) редукује у статистички оператор?

(1) (у случају) макроскопских система у термодинамичкој равнотежи

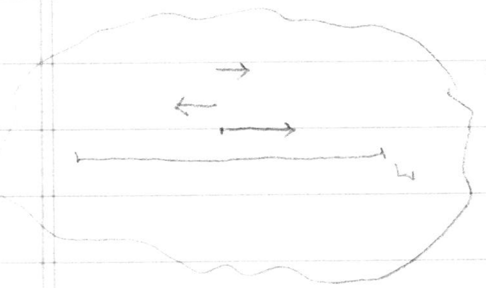
(2) и (када) тражимо макроскопске (глобалне) величине.

(б) Пример: $N = 1$ $V \to L$

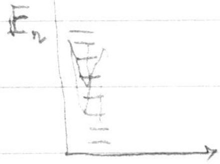
$$\langle x | k_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i k_n x}, \quad k_n = n\frac{2\pi}{L}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

А: 

$$\langle k_n | \hat{H} | k_n \rangle = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = E_n$$



B



— судари са честицама купатила B $\Rightarrow$

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} & & \\ & \rho_{mn}(t) & \\ & & \end{bmatrix}$$

опис преласка са нивоа m на ниво n

(„квантна кохеренција" се не може одржати)

Постављамо „глобална" питања: Вероватноћу да честица има енергију ϵ тј. $w(\epsilon)$ или $\bar{\epsilon}$?
(не микроскопска око квантне еволуције)

Претпоставимо да време мерења, $T_m > \hbar\beta$ (мања резолуција за β велико тј. ниске температуре)

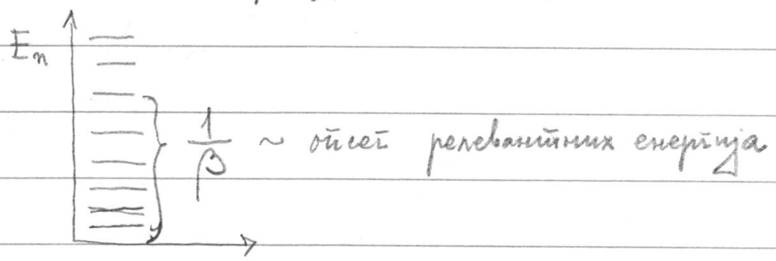
Очекујемо: $\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m}\rho(t)\,dt$ или

ако радимо усредњавање по ансамблима (репликама) система:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho^{k}(t)\,dt$$

да када $T_m \to \infty$ или $N \to \infty$ $\quad \rho(t) \longrightarrow \rho_{mn} = \delta_{mn}\frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_l e^{-\beta E_l}}$

$\Rightarrow$ Стање је „мешано" и β је параметар мешања

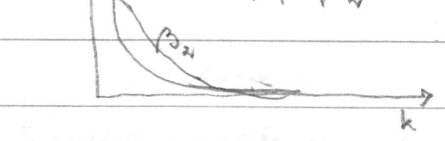


$$\sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_k \frac{\Delta k}{\frac{2\pi}{L}} e^{-\beta E_k} \xrightarrow{L\to\infty} \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-\beta\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$$= \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{2m}{\beta\hbar^2}}\sqrt{\pi} = \frac{L}{\lambda_T}$$

$w_n = \rho_{mn}\delta_{mn}$

$$w_n = \frac{\lambda_T}{L}e^{-\beta\epsilon}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \kappa T$$ „класика"

? $$\langle x | \hat{\rho} | x' \rangle = \frac{\langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x' \rangle}{\int dx \langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x \rangle}$$ $\leftarrow$ израчунали $\left(\sum e^{-\beta E_n} = \frac{L}{\lambda_T} \right)$

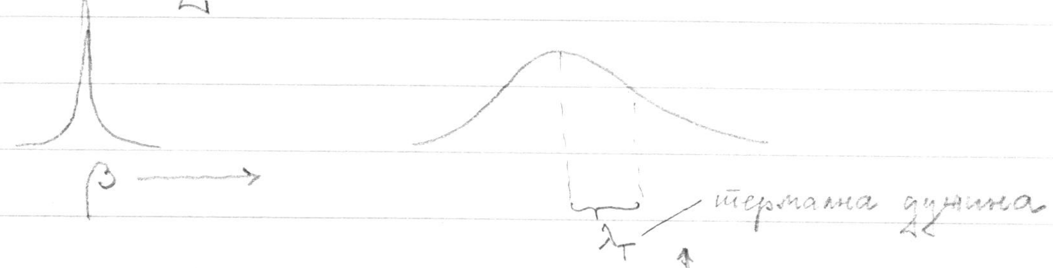
$\hat{\rho}$ носи информацију о систему и „пројектује" $|x'\rangle$ у систем и даје преклапање (вероватноћу преласка) у $|x\rangle$

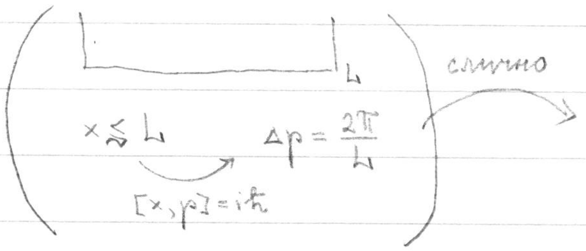
$$\langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x' \rangle = \sum_n \frac{1}{L} e^{-i k_x (x - x')} e^{-\beta \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}}$$

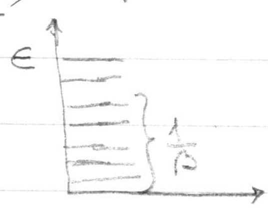
$$\frac{2\pi}{L} = \Delta k \qquad L \to \infty \to \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-ik(x-x')} e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$$= \frac{1}{\lambda_T} e^{-\frac{m (x-x')^2}{2 \beta \hbar^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle = \frac{1}{L} e^{-\pi \frac{(x-x')^2}{\lambda_T^2}}$$







$$\epsilon \lesssim \frac{1}{\beta} \qquad \sqrt{\langle p^2 \rangle} \sim \sqrt{mT}$$

$$[x, p] = i\hbar \to \sqrt{\langle x^2 \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{mT}} \sim \lambda_T$$

Учестали судари на високим T
размазују вредности p (стварају неодређеност у p)
и то смањује неодређеност x (која је бесконачна у $T=0$)

ЛИТЕРАТУРА

1 R. Feynman, Statistical Mechanics

2 Landau & Lifshitz, Statistical Physics I

II Задаци – Статистички оператор (поглавље)

II.1.(5) Израчунати entanglement ентропију подсистема A стања

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A |-\rangle_B + |-\rangle_B |+\rangle_A\right) \quad \text{и}$$

$$|b\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle_A |-\rangle_B + \frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle_A |+\rangle_B$$

II.2.(6) Размотрити Китаев ланац са само два чвора; $i=1,2$ тј. систем фермиона (без спина) са Хамилтонијаном

$$\hat{H} = -t\left(a_1^+ a_2 + a_2^+ a_1\right) + \Delta a_1 a_2 + \Delta a_2^+ a_1^+$$

(а) Решити eigen-проблем и наћи матрицу густине за један чвор.

(б) Узети да је $t = \Delta$ и увести смену

$$c_i = \frac{\gamma_{A,i} + i\gamma_{B,i}}{2} \; ; \; i = 1,2$$

где $\gamma_{A(B)}$ је Мајорана фермион $\gamma^+_{A(B)} = \gamma_{A(B)}$.

Какав је облик Хамилтонијана у Мајорана репрезентацији.

(в) Вратити се у репрезентацију уобичајених фермиона, али таквом да дијагонализује Хамилтонијан.

Референце: Kitaev, Laumann arXiv: 0904.2771

Greiter, Schnells, Thomale arXiv: 1402.5262.