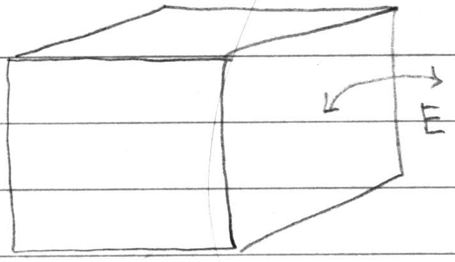
III Идеални Бозе и Ферми гасови

III(A) Увод

(a)



V, N, T

разматрање канонског ансамбла →

∸ вероватноћа да систем има енергију E_i: $w_i = \dfrac{e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$

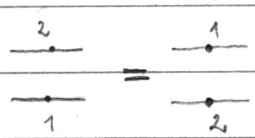
– стања идеалних гасова:

преко попуњености једночестичних нивоа ϵ_a, $a = 1, 2, \dots$

$n_a = 0, 1$ фермиони

$n_a = 0, 1, 2, \dots$ бозони

Таква репрезентација је одраз квантне статистике



(класично ≠)

Можемо увести:

$$Q = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad \text{и} \quad F = -\frac{1}{\beta}\ln Q$$

тако да $F = U - TS$ где $U = \sum_i w_i E_i$

$S = -\sum_i k_B w_i \ln w_i$

$\Rightarrow$ F је слободна енергија ...

Али тешко је израчунати Q са условом фиксираног броја честица $N = \sum_a n_a$!

$\Longrightarrow$

(б) Допуштамо размену N са купатилом и уводимо контролни параметар μ = хемијски потенцијал који даје тежину различитим N (разматрање великог канонског ансамбла)

$$Q \rightarrow Q^{(\mu)} = \mathrm{tr}\, e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$$

$\Rightarrow$ тежина $\sim (e^{\beta\mu})^N$

када $\beta \to 0$, изостанак тежине ~ 1 ако μ коначно, зато $\mu \to -\infty$!

$$|N, E_i^N\rangle \quad : \quad w_{i,N} = \frac{e^{-\beta(E_i^N - \mu N)}}{Q^{\mu}}$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Q^{(\mu)} \; ; \; U = \sum_{N,i} E_i^N w_{i,N} \; ; \; S = -k_B \sum_{N,i} w_{i,N} \ln w_{i,N}$$

$$\Rightarrow \Omega(V,T,\mu) = F - \mu N$$ велики термодинамички потенцијал

„Главна једначина":

$$\langle N \rangle = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V}$$ јер налазимо

$$\mu = f(\underbrace{\langle N \rangle, T, V}_{\text{уобичајене варијабле}})$$

(в) Идеални системи:

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i \overbrace{a_i^+ a_i}^{\hat{n}_i} \quad : \quad |n_1, n_2, \dots\rangle$$

$$\Rightarrow \quad N = \sum_i n_i \quad \rightarrow \quad E^N = \sum_i n_i \epsilon_i$$

$$Q^{(\mu)} = \sum_{N, E^N} e^{-\beta(E^N - \mu N)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \; e^{-\beta \sum n_i(\epsilon_i - \mu)}$$

$$= Q_1^{(\mu)} Q_2^{(\mu)} \dots \quad \text{где} \quad Q_i^{(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n(\epsilon_i - \mu)}$$

Увели параметар μ који доводи до декупловања (као „независни системи")
али који се одређује из услова (наметнуте везе) да је $\langle N \rangle$ фиксирано.

$$\Omega_k = -\frac{1}{\beta} \ln Q_k^{(\mu)}$$

$$\langle n_k \rangle = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, e^{-\beta n(\epsilon_k - \mu)}}{\sum_{\bar{n}} e^{-\beta \bar{n}(\epsilon_k - \mu)}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, w_n^k$$

$$T \rightarrow \infty \qquad w_0, w_1 \gg w_i \qquad i > 1$$

$$\langle n_k \rangle \approx 0 \cdot w_0 + 1 \cdot w_1 = w_1 = \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{e^{-\beta \Omega_k}} \approx e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}$$

$$\text{јер} \quad w_0 = \frac{1}{e^{-\beta \epsilon_k}} \approx 1$$

класична – Maxwell – Boltzm
статистика

$$\langle n_k \rangle \approx e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \quad \Longrightarrow \quad \mu \rightarrow -\infty$$

III. (Б) Идеални Бозе гас

(а) Бозе-Ајнштајн кондензација (BEC)

$\epsilon_i \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$

$$Q_i^{(\mu)} = \sum_n e^{-\beta n(\epsilon_i - \mu)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}$$

$$\epsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \leq 0 \ !$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \sum_k \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} \qquad \epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \xrightarrow{V \to \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1}$$

високо T развој по $\boxed{z = e^{\beta\mu}} \leq 1$

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \frac{e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} = \frac{z}{\lambda_T^3} + O(z^2)$$

класични део

$$= \frac{1}{\lambda_T^3} \zeta_{3/2}(z) \quad \text{где} \quad \zeta_{3/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{3/2}}$$

(из неопходне смене $e^{-\beta\epsilon_p} \to e^{-\beta n \epsilon_p}$, $\sqrt{n}\,p \to p$.)

$\zeta_s(z)$ је уопштење Riemann зета функције $\zeta_s(z$

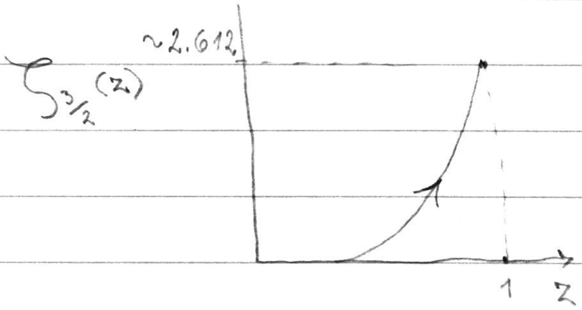
Радимо на $\rho = \frac{N}{V} = \text{const}$!

и тражимо „$\mu = f(N, V, T)$"

$$\zeta_{3/2}(z) = \rho \lambda_T^3 \sim \frac{1}{T^{3/2}}$$

$\rho = \mathrm{const}$ $\quad T$ опада $\rightarrow$ десна страна расте

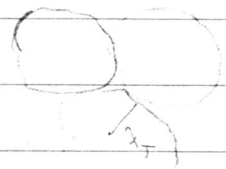
$\Rightarrow$ лева ——"—— са растом z



? $T = 0 \longrightarrow z > 1$ (нефизично)

$z = 1$ тј. $\mu = 0$ дефинише температуру T_c

кад је $\frac{1}{\rho} \sim \lambda_{T_c}^3$



$$\zeta_{3/2}(1) = \rho \lambda_{T_c}^3$$

(квантна статистика важна)

$T < T_c \Rightarrow \zeta_{3/2}(1) = \rho \lambda_T^3 \longrightarrow \rho$ опада ?! са T

(а претпостављена константна)

Где су честице? У „кондензату" тј. $\epsilon_0 = 0$!

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{1}{N_0}\right)$$

$\mu = 0 \to N_0 \sim N \to \infty$

BEC: ϵ_0 ниво макроскопски попуњен!

(једна тачка у интеграцији невидљива)

ϵ_1 ниво? $\quad \epsilon_1 \sim p^2 \sim \frac{1}{L^2} \sim \frac{1}{V^{2/3}}$

$$N_1 = \frac{1}{e^{-\beta\epsilon_1}-1} \sim V^{2/3} \Rightarrow \lim_{\substack{V\to\infty \\ N\to\infty \\ \rho = const}} \frac{N_1}{N_0} \to 0 \;!$$

$$n_0 = \frac{N_0}{V} \to \rho_0 \neq 0$$

$$n_1 = \frac{N_1}{V} \to 0$$

$T < T_c$

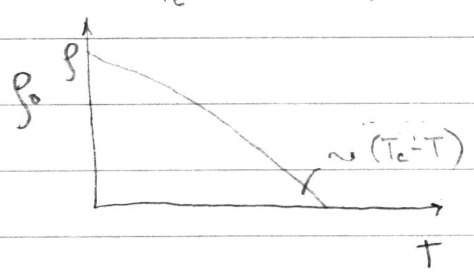
$$N = N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p\, \frac{1}{e^{\beta\epsilon_p}-1} \Rightarrow n_p = \frac{(2\pi)^3}{V} N_0\, \delta(p) + \frac{1}{e^{\beta\epsilon_p}-1}$$

док класично $N=1, V$: $\quad w_p = \frac{\lambda_T^3}{V} e^{-\beta\epsilon_p} \Rightarrow n_p = N w_p = \frac{\lambda_T^3}{V} N e^{-\beta\epsilon_p}$

(нема сингуларности)

$$\rho = \rho_0 + \rho_{exc}$$

$$\rho_0 = \rho - \rho_{exc} = \frac{\zeta_{3/2}(1)}{\lambda_{T_c}^3} - \frac{\zeta_{3/2}(1)}{\lambda_T^3} = \frac{\zeta_{3/2}(1)}{\lambda_{T_c}^3}\left(1 - \frac{T^{3/2}}{T_c^{3/2}}\right)$$



(б) Фазни прелази идеалног Бозе гаса

$\rho = const$

високо T развој по $z \leq 1$

$$E = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p\, \epsilon_p \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1} = \frac{3}{2} k_B T \frac{z}{\lambda_T^3} V + \cdots$$

(унутрашња енергија)

$$= \frac{3}{2} k_B T\, \zeta_{5/2}(z) \frac{V}{\lambda_T^3}$$

$$T > T_c \quad = \frac{3}{2} k_B T \cdot \frac{\zeta_{5/2}(z)}{\zeta_{3/2}(z)} N \Rightarrow$$

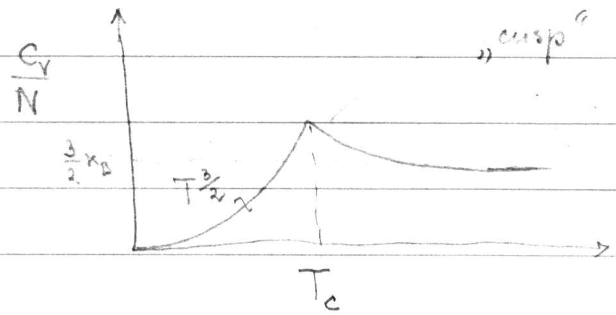
$$E \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{3}{2} k_B T N \checkmark$$

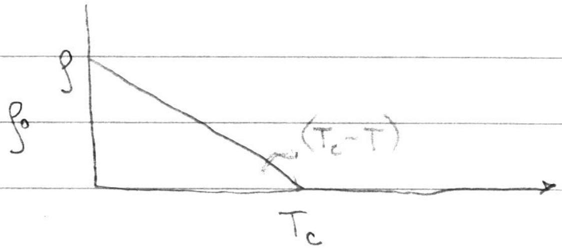
$$T < T_c \qquad E = \frac{3}{2} k_B T\, \zeta_{5/2}(1) \frac{V}{\lambda_T^3} \sim T^{5/2}$$

$V = const$ $\quad E = Q$ $\Rightarrow$ $C_V = \dfrac{dE}{dT}$

$N = const$ $\quad$ топлота

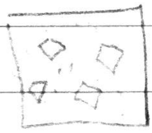
„cusp" (Ландау Лифшиц, Fetter Walecka)





Статистика доводи до фазног прелаза II врсте или
(без интеракција) континуалног прелаза ?

фазни прелази:

(1) I реда (неконтинуални) – на T_c коегзистенција фаза 

→ параметар уређења и неки потенцијали неконтинуални

Пример: $\rho_l > \rho_g$, $S_l < S_g$ течност↔г

– ξ корелациона дужина је на T_c коначна

(дужина дуж које флуктуације микроскопских величина су корелисане)

(2) II реда (континуални) – на T_c јединствена критична фаза

(фазе како се приближавају постају идентич

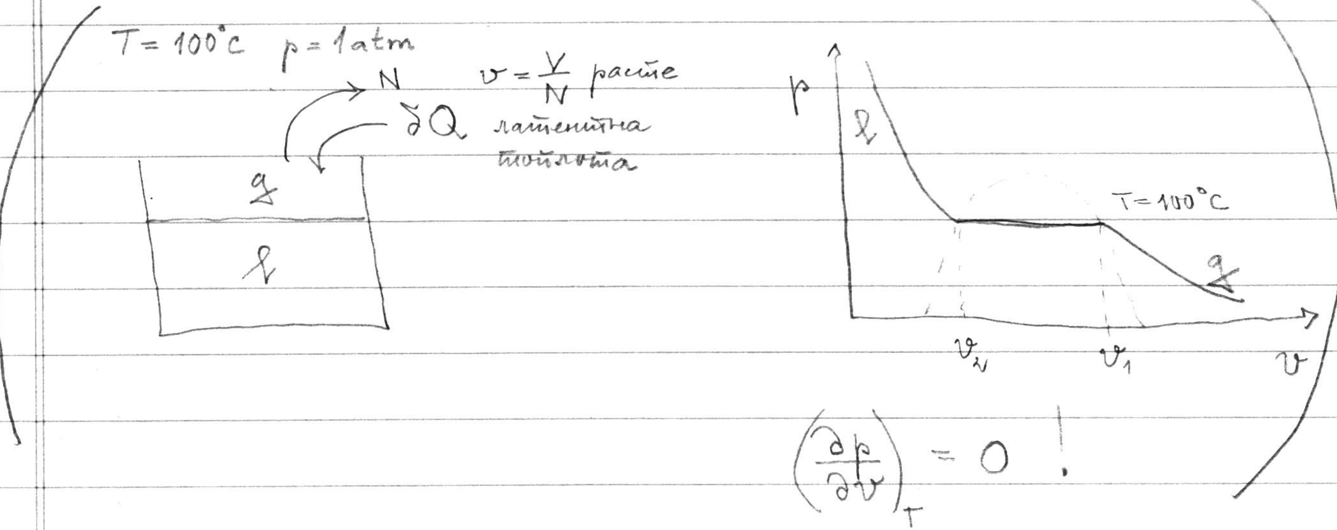
– ξ дивергира.

фазни прелази у идеалном Бозе гасу:

– фазни прелази дају карактеризацију фаза (овде BEC)

– постоје специфичности (идеалан гас) али и својства која ће се пренети на системе са интеракцијама.

(1) I реда прелаз на $p = const$.



$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0 \; !$$

$p = \text{const}$: идеални Бозе гас → BEC

парцијалном интеграцијом (у идеалном гасу): $\Omega = -\frac{2}{3}E$ (Л.Л.)

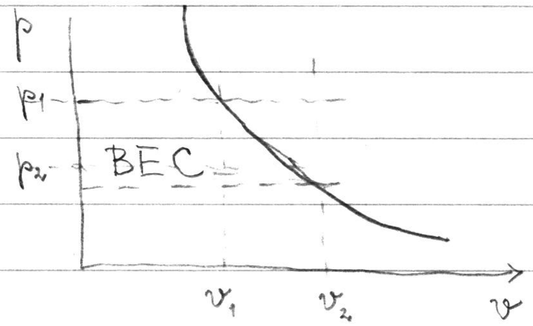
(из хомогености унутрашње енергије:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda E = E(\lambda S, \lambda V, \lambda N)\Big|_{\lambda = 1} \Rightarrow E = TS - pV + \mu N$$)

$$\Omega = \underbrace{E - TS}_{F} - \mu N = -pV$$

$$\Rightarrow pV = \frac{2}{3}E \underset{T<T_c}{=} \frac{2}{3}\zeta_{\frac{5}{2}}(1) \cdot \frac{V}{\lambda_T^3}\frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0 \;!$$



$p = \text{const}$: $\frac{N_0' + N_{exc}}{V}$, $\frac{N_0'' + N_{exc}}{V}$, ...

v' , v'' , ...

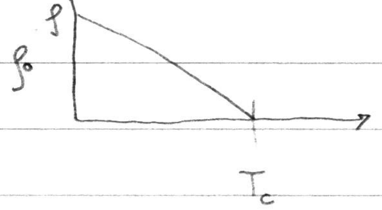
⇒ „бесконачна компресибилност"

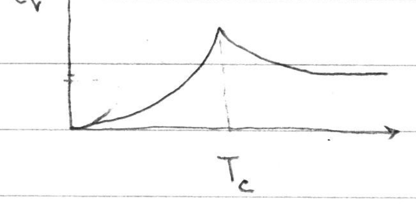
коегзистенција кондензата ($p = 0$) и $p \neq 0$ гаса у p-импулсном простору

Прелаз на $p = \text{const}$ је егзотичан – укључивањем интеракција компресибилност постаје коначна и прелаз постаје II врсте.

II реда прелаз на

(2) $\rho = \text{const}$ (уобичајени прелаз)





$\rho = \text{const} \Rightarrow$ прелаз је континуалан?

$\xi = ?$ у близини прелаза

$$\langle \Psi^+(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_2)\rangle_T = tr\left[\Psi^+(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_2)\hat{\rho}\right] =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} e^{-i\vec{r}_1\vec{k}_1 + i\vec{r}_2\vec{k}_2} \underbrace{tr\left[a^+_{k_1} a_{k_2}\hat{\rho}\right]}_{\delta_{k_1,k_2}\,\hat{n}_{k_1}}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}\, n_k$$

$$T < T_c \qquad = \underbrace{\frac{N_0}{V}}_{=\text{const} \neq 0 \text{ и кад } |\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}}{e^{\beta\epsilon_k}-1}}_{\sim \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}} \sim$$

(у наставку показано)

ODLRO = off-diagonal long-range order

$T > T_c$

$T \to T_c$

$z_1 = e^{\beta\mu} \to 1$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}}{\underbrace{\frac{1}{z_1}e^{\beta\epsilon_k}-1}}$$

(као Yukawa (Coulomb) потенцијал раније)

$$\approx \frac{1}{z}(1+\beta\epsilon_k) - 1 \approx \frac{\beta}{2m}(k^2 + k_c^2)$$

дуготаласна апроксимација ($|\vec{k}| \approx 0$)
јер очекујемо да је ту
доминантан допринос за
$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \to \infty$

где $k_c^2 \sim \frac{1-z}{\lambda_T^2}$

$$\Longrightarrow \quad \langle \Psi^+(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_2)\rangle_T \sim \frac{e^{-\frac{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{\xi}}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

где $\xi \sim \frac{\lambda_T}{\sqrt{1-z_1}} \xrightarrow[T\to T_c]{} \infty$ ✓

⇒ Из прелаза двојни опис BEC фазе:

(1) коегзистенција у p простору

(2) ODLRO уређење у реалном простору.

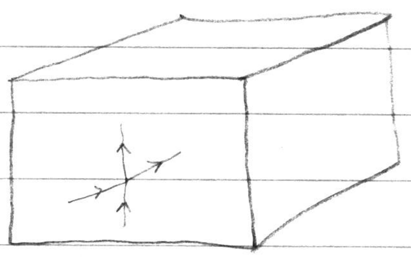
$$\lim_{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to\infty} \langle \Psi^{+}(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_2)\rangle \overset{?}{\simeq} \langle \Psi^{+}(\vec{r}_1)\rangle\langle \Psi(\vec{r}_2)\rangle$$

Да ли су стања система расподеле
а не стања одређеног броја честица ако имамо ODLRO?

Опис и разумевање SF и SC захтева
разматрање „кохерентних стања" – суперпозиција стања
са различитим бројем честица
тј $\langle \Psi(\vec{r})\rangle \neq 0$

(в) Зрачење црног тела

обични бозони

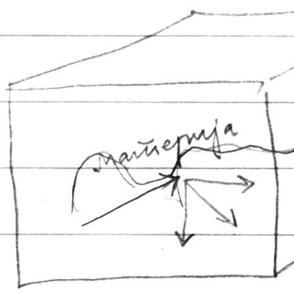


V, T, μ $\qquad \hat{\rho} = \dfrac{e^{-\beta\hat{H}+\beta\mu\hat{N}}}{\mathrm{tr}\, e^{-\beta\hat{H}+\beta\mu\hat{N}}}$

– $\hat{\rho}$ преузет из класичне статичке физике где ρ одређују интеграли (константе) кретања

⇒ $\hat{H}, \hat{N}$ класификују стања $|N, E_N\rangle$

– μ је независна варијабла и фиксира N (могућа независна варијабла) фотони



– за фотоне који готово не интерагују морамо унети материју која их локализује и термализује (изазива сударе) ⇒

– број честица није константа

– $\hat{H}$ само класификује $|E\rangle$

→ $\mu = 0$ → N није независна варијабла коју можемо фиксирати

Л.Л. : N параметар који фиксирамо из захтева за термодинамичком равнотежом при (уобичајено) фиксираним T и V:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0 = \mu \longleftarrow$$

{ F је слободна енергија и тражимо минимум

($dQ < TdS$ је уопште
$V = \text{const} \rightarrow dE = dQ$
$T = \text{const} \rightarrow d\underbrace{(E - TS)}_{=dF} < 0$)

⇒ $\mu = 0$

две поларизације

$$E = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \; \frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}$$

$\omega = ck$

Planck-ов закон : $$\frac{dE}{V}(\omega, \omega + d\omega) = \frac{1}{\pi^2 c^3}\, \omega^2 \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\, d\omega$$

Stefan-Boltzmann закон $$E \sim T^4$$

у термодинамичкој равнотежи:

Како мерити? $$E_e = a\, E_i$$ "incident"

"emitted" $a = 1$ за црно тело које зрачи на начин Planck-ово предвиђања

коефицијент апсорпције

III.(B) Идеални Ферми гас

ϵ_i, σ : $n_i = 0, 1$

спин

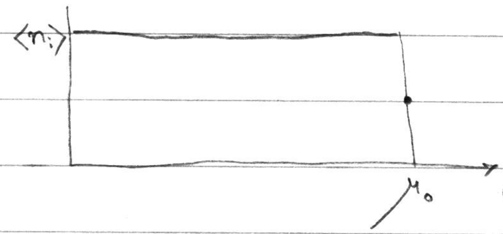
$$\hat{\rho} = \prod_i \hat{\rho}_i \qquad \hat{\rho}_i = \frac{e^{-\beta \hat{n}_i(\epsilon_i - \mu)}}{tr\left(e^{-\beta \hat{n}_i(\epsilon_i - \mu)}\right)}$$

$$\langle \hat{n}_i \rangle = tr(\hat{n}_i \hat{\rho}) = tr(\hat{n}_i \hat{\rho}_i) = \sum_n \frac{n\, e^{-\beta n(\epsilon_i - \mu)}}{\sum_{\bar{n}} e^{-\beta \bar{n}(\epsilon_i - \mu)}}$$

$$= \frac{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$$

$\rho = const$

$T = 0$

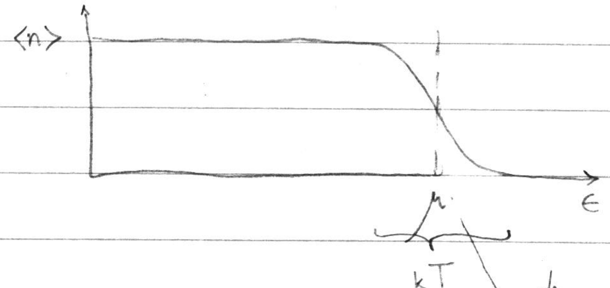


E, p (притисак) $\neq 0$!

$$\rho = 2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p_0} dp\, p^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{p_0^3}{3} \sim \mu_0^{3/2}$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{2m\mu_0}{\hbar^2}}$$

$T \neq 0$



(1) претпоставим $\mu \gg kT$ оправдано у металима $T_F \sim 10^4 \, ^\circ K$.

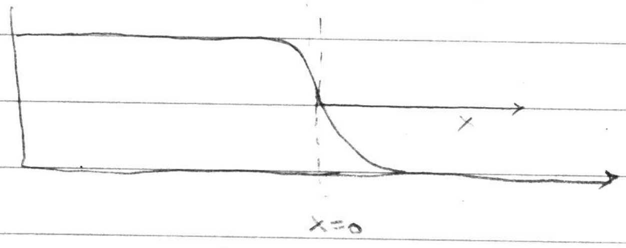
(2) Ферми ниво је позорница ефективне физике

(ту додајемо Q кад T расте у идеалном гасу)

и кад додамо (разматрамо) интеракције

→ Ландау: „Ферми течности" (скоро као идеални гас квази-честица)

(3) и граница између честица и шупљина: $x = \beta(\epsilon - \mu)$



$$\frac{1}{e^x + 1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{e^{-x} + 1}}_{\text{вероватноћа да је ниво празан (да постоји „шупљина")}}$$

(и антисиметрија: $\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-x}+1}$)

спин

$$N = 2 \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} \longrightarrow \mu \underbrace{(N, V, T)}_{\text{уобичајене варијабле}}$$

$$E = 2 \sum_k \frac{\epsilon_k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

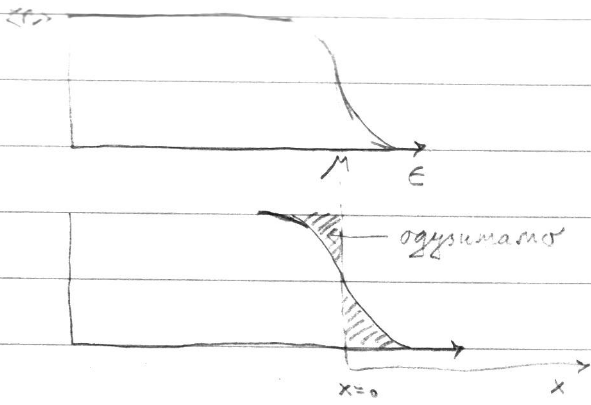
$$\frac{1}{V} 2 \sum_k \longrightarrow 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk\, k^2 4\pi = \int d\epsilon \underbrace{\frac{dN}{d\epsilon}}_{g(\epsilon)} \frac{1}{V}$$

$g(\epsilon)$ — густина стања

$g(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$

ако $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$f(\epsilon) \sim \epsilon^m \qquad I = \int_0^\infty \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} = ?$



$x = \beta(\epsilon - \mu) \qquad \epsilon = \mu + \frac{x}{\beta}$

$$I = \frac{1}{\beta}\int_{-\mu\beta}^{0} \frac{f(\mu+\frac{x}{\beta})}{e^x+1}\,dx + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{f(\mu+\frac{x}{\beta})}{e^x+1}$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_{-\mu\beta}^{0} f(\mu+\tfrac{x}{\beta}) - \frac{1}{\beta}\int_{-\mu\beta}^{0} \frac{f(\mu+\frac{x}{\beta})}{e^{-x}+1} + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{f(\mu+\frac{x}{\beta})}{e^x+1}$$

$$= \int_0^\mu f(\epsilon)\,d\epsilon - \frac{1}{\beta}\int_0^{\beta\mu} \frac{f(\mu-\frac{x}{\beta})}{e^x+1}\,dx + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{f(\mu+\frac{x}{\beta})}{e^x+1}$$

Горња граница $\beta\mu \to +\infty$?

процена грешке $\int_0^{\beta\mu} e^{-x} x^m\,dx \sim (\beta\mu)^n e^{-\beta\mu}$

брже у нулу од било које $\frac{1}{(\beta\mu)^n}$

$$\approx \int_0^\mu f(\epsilon)\,d\epsilon + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty dx\,\frac{1}{e^x+1}\sum_{n=1}^\infty f^{n}(\epsilon)\Big|_{\epsilon=\mu}\left(\frac{2x}{\beta}\right)^n$$

Sommerfeld-ov razvoj:

$$= \int_0^{\mu} f(\epsilon)\,d\epsilon + \frac{2}{\beta^2} f'(\epsilon)\Big|_{\epsilon=\mu} \cdot \underbrace{\frac{\pi^2}{12}} + \dots \qquad \left(\int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{m=1} \frac{(-1)}{m^2}\right.$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1} = \frac{1}{2}\zeta_2(1)$$

$$g(\epsilon) = a\sqrt{\epsilon}$$

$$\frac{\rho}{a} = \frac{2}{3}\mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu}} = \left(\frac{\rho}{a}\right)_{T=0} = \frac{2}{3}\mu_0^{3/2}$$

$$\frac{E}{a} = \frac{2}{5}\mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{3}{2}\sqrt{\mu}$$

$$\mu^m \approx \mu_0^m + m\,\mu_0^{m-1}(\mu-\mu_0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mu_0}(\mu-\mu_0) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \approx 0$$

$$\mu \approx \mu_0 - \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}$$

$$\frac{E}{a} \approx \frac{2}{5}\mu_0^{5/2} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2\frac{3}{2}\sqrt{\mu_0} + \mu_0^{3/2}\left(-\frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\right)$$

$$\frac{\delta E}{a} \approx \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2\sqrt{\mu_0} = \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2\frac{1}{\mu_0}\cdot\left(\frac{\rho}{a}\frac{3}{2}\right)$$

$$\delta E \approx \frac{\pi^2}{4}\rho\,(k_B T)\cdot\underbrace{\left(\frac{k_B T}{\mu_0}\right)}$$

просечна енергија

$\sim$ број нивоа који су побуђени око Ферми нивоа

$\Rightarrow C_V = \gamma T$ као у металима за $T \to 0$!

иначе $C_V = \gamma T + \alpha T^3$ $\nwarrow$ од фонона (осцилација кристалне решетке)

ЛИТЕРАТУРА (основна)

1. R. Feynman, Statistical Mechanics
2. Landau, Lifshitz, Statistical Physics
3. M. Stone, The physics of quantum fields (ODLRO)
4. J. Annett, Superconductivity, Superfluids, and Condensates

III Задаци – Идеални Бозе и Ферми гасови

III.1 (7) Израчунати ентропију идеалног Бозе гаса испод T_c.
Показати да је пропорционална броју честица које нису кондензоване.

III.2 (8) Нађи у p-v дијаграму идеалног Бозе гаса криву
која раздваја BEC фазу од фазе нормалног гаса.

III.3 (9) Израчунати корелациону функцију, $tr[\hat{\rho}\,\Psi^{+}(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_2)]$
(а) идеалног (нерелативистичког) Бозе гаса и (б) гаса фотона
на високим температурама.

III.4 (10) Израчунати ентропију идеалног дегенерисаног (на ниским T)
Ферми гаса. Упоредити ентропије идеалног Бозе и Ферми гаса.

Напомена: У III 1 и III.4 ентропију израчунати и на основу дефиниције,
$S = -k_B\, tr(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ и преко познатог топлотног капацитета, C_V.