IV Ферми системи и интеракције

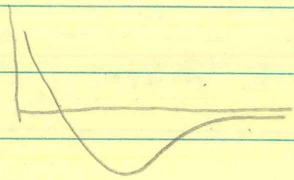
(A) Разређени Ферми гас – увод

– Квантна статистика је глобални entanglement која се не може свести на привлачне (Бозе) и одбојне (Ферми) интеракције

– У системима увек постоје интеракције ЕМ порекла заједно са Ферми „одбијањем".

– Доводе до преласка гаса у течно и чврсто стање на ниским температурама

међуатомски потенцијал:



– У лабораторији се могу креирати системи разређеног Ферми гаса на ниским температурама („cold atoms") са посебним интеракцијама.

Разређени Ферми гас:

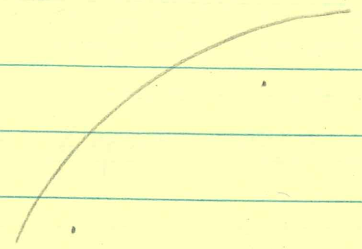
– Ефективни радијус интеракције је мали у односу на средње растојање међу честицама:

$$a \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

→ две ефективне дужине дају две ефективне скале енергије (импулса):

$$\frac{1}{a} \gg k_F \sim \frac{1}{\lambda_F}$$

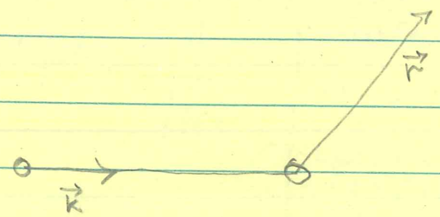
→ судари ниских енергија или велике таласне дужине

$\rightarrow$ 

Друга честица као тачка
$\Rightarrow$ s-wave судари.

Уопште:

F.W.: $\lim\limits_{|\vec r|\to\infty}\psi_{\vec k}(\vec r) = e^{i\vec k\vec r} + f(\vec k',\vec k)\,\dfrac{e^{ikr}}{r}$



$\vec k' = k\cdot\hat r$

где

$$f(\vec k',\vec k) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int d\vec r\, e^{-i\vec k'\vec r}\, V(\vec r)\,\psi_{\vec k}(\vec r)$$

(1) $|\vec k'| = |\vec k| \sim 0$

(2) Born апроксимација

ако овде $\psi_{\vec k}(\vec r) \approx e^{i\vec k\vec r}$
$\equiv$ Born апроксимација

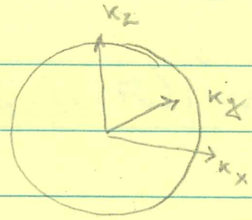
$$f(\vec k,\vec k') \to -a = -\frac{m}{4\pi\hbar^2}V(0)$$

(Б) Hartree-Fock метода

основно стање идеалног Ферми гаса:

$$\psi_{\vec k_1,\vec k_2\ldots}(\vec r_1,\vec r_2,\ldots) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} \frac{e^{i\vec k_1\vec r_1}}{\sqrt V} & \frac{e^{i\vec k_1\vec r_2}}{\sqrt V} & \frac{e^{i\vec k_1\vec r_3}}{\sqrt V} & \ldots \\ \frac{e^{i\vec k_2\vec r_1}}{\sqrt V} & \cdot & \cdot & \\ \frac{e^{i\vec k_3\vec r_1}}{\sqrt V} & \cdot & \cdot & \\ \frac{}{\sqrt V} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

~ Ферми сфера



\+ интеракције $\xrightarrow{\text{Х.Ф. апроксимација}}$

Aschcroft,
Mermin књига

$$\longrightarrow \quad \Psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\vec r_1) & \varphi_1(\vec r_2) & \varphi_1(\vec r_3) & \cdots \\ \varphi_2(\vec r_1) & \cdots & & \\ \varphi_3(\vec r_1) & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

= апроксимација на начин јединствене (само једне) Slater детерминанте основног стања где

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$$

и $|\varphi_i\rangle$, $i = 1, \dots, N$ се добијају из минимизације

(а) $\langle \Psi | \hat H | \Psi \rangle = E\{\varphi_i(\vec r)\}$, где $\hat H = \hat H_0 + \hat V$,

(б) са наметнутим условом $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$.

$\Rightarrow$ Минимизирање функционала $F\{\varphi_i(\vec r)\} = E\{\varphi_i(\vec r)\} - \sum_i \varepsilon_i \left(\langle \varphi_i | \varphi_i \rangle - 1\right)$

где су φ_i и φ_i^* независне варијабле.

Применујемо метод Lagrange умножака – овде умношци ε_i; $i = 1, \dots, N$.

— Интеракциони део $E[\varphi_i(\vec r)]$:

$$\hat V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\vec r_i - \vec r_j)$$

због идентичности разматрамо само пар $\vec r_1, \vec r_2$ $\longrightarrow$

$$\mathcal{V} = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \cdots \int d\vec{r}_N \, |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)|^2 \, V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) =$$

$$\left(\sim \frac{1}{\sqrt{N!}}\Big(\sum_{P} \dots\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{N!}}\Big(\sum_{P'} \dots\Big) \cdot V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right.$$

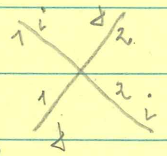
$$\left. = \frac{1}{N!} \sum_{P,P'} \big(\delta_{P,P'} - \delta_{P,P' \cdot E(1,2)} \big) \right)$$

пермутације се разликују до на измену 1 и 2

$$P: \big(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_i(\vec{r}_1), \dots, \psi_j(\vec{r}_2), \dots \big)$$

Ако смо изабрали два става за $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (на $N(N-1)$ начина) остатак чине $(N-2)!$ пермутације које дају идентичан допринос.

$$\mathcal{V} = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \, V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \, \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \Big(|\psi_i(\vec{r}_1)|^2 |\psi_j(\vec{r}_2)|^2 - \psi_i^*(\vec{r}_1)\psi_i(\vec{r}_2)\psi_j^*(\vec{r}_2)\psi_j(\vec{r}_1) \Big)$$



директан

изменски део

Ако постоји спински део у изменском делу мора бити $\delta_{\sigma_i,\sigma_j}$ јер се ту онда појављују скаларни производи у спинском простору: $\langle \chi_i | \chi_j \rangle_1, \langle \chi_j | \chi_i \rangle_2$

→ Укупан удео интеракције у $E\{\psi_i(\vec{r})\}$:

$$V\{\psi_i\} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \, V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Big(|\psi_i(\vec{r}_1)|^2 |\psi_j(\vec{r}_2)|^2 - \psi_i^*(\vec{r}_1)\psi_i(\vec{r}_2)\psi_j^*(\vec{r}_2)\psi_j(\vec{r}_1)\,\delta_{\sigma_i,\sigma_j} \Big)$$

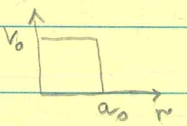
...

Минимизацијом $F\{\varphi_i\}$ добијамо ХФ једначине:

$$\left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}+\sum_i\int d\vec{r}\,'\,|\varphi_i(\vec{r}\,')|^2\,V(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]\varphi_j(\vec{r})$$

$$-\,\delta_{\sigma_i\sigma_j}\cdot\sum_i\int d\vec{r}\,'\,\varphi_i^*(\vec{r}\,')\varphi_j(\vec{r}\,')V(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\varphi_i(\vec{r})=\varepsilon_i\varphi_j(\vec{r})$$

(B) $\boxed{\text{Разређени Ферми гас}}$:



$a \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$

Примењујемо ХФ на најједноставнији начин: $\varphi_i(\vec{r}) \longrightarrow \frac{e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$

тј. опис основног стања апроксимирамо идеалним Ферми гасом

$\sim$ ○ Ферми сфера у $\vec{k}$ простору

$|FS\rangle$

$$\hat{H}=\sum_{\vec{k},\sigma}\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}a_\sigma^+(\vec{k})\,a_\sigma(\vec{k})\;+$$

$$\frac{1}{2V}\sum_{\substack{\vec{q},\vec{k}_1,\vec{k}_2\\ \sigma_1,\sigma_2}}V(\vec{q})\,a^+_{\sigma_1}(\vec{k}_1+\vec{q})\,a^+_{\sigma_2}(\vec{k}_2-\vec{q})\,a_{\sigma_2}(\vec{k}_2)\,a_{\sigma_1}(\vec{k}_1)$$

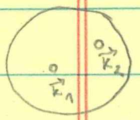
$$=\hat{H}_K+\hat{H}_V$$

$$\langle FS|\hat{H}|FS\rangle = E_K+E_V$$

$$E_K:\quad \frac{E_K}{V}=2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{\pi^2}\frac{1}{2m}\frac{k_F^5}{5}=\frac{3}{5}\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)$$

$$\frac{N}{V}=\underbrace{2}_{\text{спин}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=\frac{1}{\pi^2}\frac{k_F^3}{3}$$

E_V: $\langle FS | a^+_{\sigma_1}(\vec k_1+\vec q)\, a^+_{\sigma_2}(\vec k_2-\vec q)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle$



~ анихилационим операторима стварамо две шупљине у $|FS\rangle$

– да би повратили стање $|FS\rangle$ (свако друго би било ортогонално и давало нулу)

разматрамо две могућности (1) $\langle FS | a^+_{\sigma_1}(\vec k_1+\vec q)\, a^+_{\sigma_2}(\vec k_2-\vec q)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle =$

$$\vec k_1+\vec q=\vec k_1 \qquad \vec k_2-\vec q=\vec k_2$$

$$\Rightarrow \vec q = 0$$

$\Rightarrow$ директан допринос:

$$= \langle FS| a^+_{\sigma_1}(\vec k_1)\, a^+_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle\, \delta_{\vec q,0}$$

$\delta_{\vec q,0}\langle FS| a^+_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a^+_{\sigma_1}(\vec k_1)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle = \delta_{\vec q,0}$, (где $\vec k_1$ и $\vec k_2$ у $|FS\rangle$),

јер комбинација $a^+_\alpha a_\alpha$ чита насељеност стања α.

(2) $\langle FS | a^+_{\sigma_1}(\vec k_1+\vec q)\, a^+_{\sigma_2}(\vec k_2-\vec q)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle =$

$$\vec k_1+\vec q=\vec k_2 \qquad \vec k_2-\vec q=\vec k_1$$
$$\sigma_1=\sigma_2 \qquad \sigma_1=\sigma_2$$

$$\Rightarrow \vec q = \vec k_2-\vec k_1,\ \sigma_1=\sigma_2$$

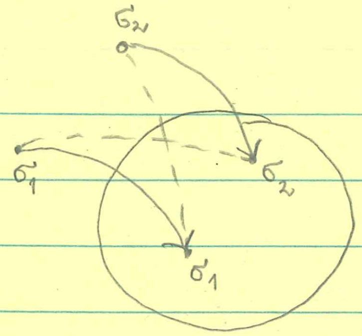
$\Rightarrow$ изменски допринос:

$$= \delta_{\sigma_1,\sigma_2}\langle FS| a^+_{\sigma_1}(\vec k_2)\, a^+_{\sigma_2}(\vec k_1)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle \cdot \delta_{\vec q,\vec k_2-\vec k_1}$$

$$= (-1)\,\delta_{\sigma_1,\sigma_2}\,\delta_{\vec q,\vec k_2-\vec k_1}\langle FS| a^+_{\sigma_1}(\vec k_2)\, a_{\sigma_2}(\vec k_2)\, a^+_{\sigma_2}(\vec k_1)\, a_{\sigma_1}(\vec k_1)|FS\rangle$$

($\vec k_1, \vec k_2$ у $|FS\rangle$)

$$= (-1)\,\delta_{\sigma_1,\sigma_2}\,\delta_{\vec q,\vec k_2-\vec k_1}$$



$$E_V = \frac{1}{2V} V(0) \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} - \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \\ \sigma}} V(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$$

директан — изменски удео

- Директан удео би добили и класично – без антисиметризације.
- Изменски удео је последица Ферми статистике.

је негативан јер присуство Ферми статистике је да држи честице одвојено и тиме смањује енергију интеракције.
То је могуће фермионима са истим σ и тиме изменски део фаворизује феромагнетизам.

$$\frac{1}{a} \gg k_F \Rightarrow V(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \approx V(0) = \int d\vec{r}\, V(\vec{r}) = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m}$$

(1) Born апроксимација
(2) $|\vec{k}| \sim 0$

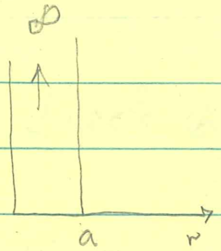
$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2V} V(0)\, 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\right)\cdot\left(\frac{N}{V}\right)\cdot N = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\right)\left(\frac{1}{\pi^2}\frac{k_F^3}{3}\right)\cdot N$$

$$\Rightarrow \frac{E_K + E_V}{N} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}(k_F a) + \dots\right)$$

мали параметар пертурбационог развоја

Напомене: (1)



сингуларна "hard-core" интеракција:

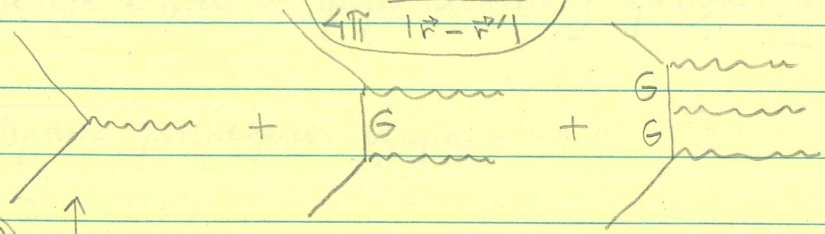
$V_{int} \to \infty \to \Psi_{\vec k}(\vec r) \to 0$

не може (само) Born апроксимација!

F.W. $\Psi_{\vec k}(\vec r) = e^{i\vec k\vec r} - \int d\vec r'\, G(\vec r - \vec r')\, V(\vec r')\, \Psi_{\vec k}(\vec r')$

$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|}$$

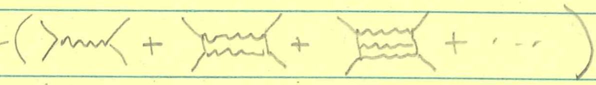
$f(\vec k', \vec k) =$



$= -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int d\vec r\, e^{-i\vec k'\vec r}\, V(\vec r)\, \Psi_k(\vec r)$

Born-ова апроксимација

бесконачни низ схематски



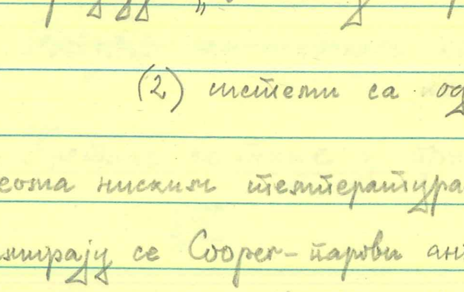
F.W. ⇒ "ladder diagrams" у многочестичној теорији пертурбације

- сумирање бесконачног низа (сингуларних: $V \to \infty$) чланова доводи до ренормализоване интеракције и коначног ефективног радијуса „a" као у теорији спорих судара ($|\vec k| \to 0$) (у случају $V \to \infty$, $r < a$)

(2) ефекти са одбојном интеракцијом разређеног Ферми гаса на веома ниским температурама, $T < T_c$, су у суперпроводној фази = формирају се Cooper-парови угаоног момента $l = 1$ ($S_{spin} = 1$).

Kagan, Chubukov, JETP Lett. 47, 614 (1988).

Наш опис је у реду за $T > T_c$



Две честице нису саме – морамо узети у обзир колективно понашање – осцилације FS.

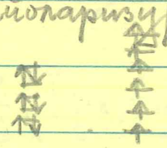
(Г) Квантни Холов феромагнет (КХФ)

- систем електрона у две димензије са магнетним пољем нормално на раван - $B_\perp$
- желимо да илуструјемо најједноставнији тополошки изолатор (посебно стање неинтерагујућих електрона) који постаје изузетан феромагнет у присуству Coulomb интеракције
- разматрање разређеног Ферми гаса:

$$E = E_k + E_V$$

E_k: деполаризује

E_V: мала поправка која фаворизује феромагнетизам



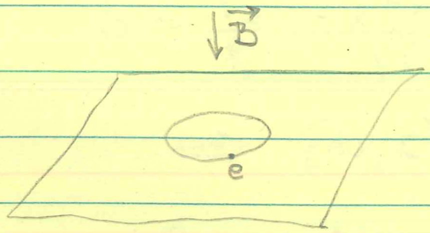
$\Longrightarrow$ разређени Ф. гас је парамагнет

$E_{\uparrow\downarrow} < E_{\uparrow}$

- Да ли је могуће сузбити утицај кинетичког члана?

Могуће магнетним пољем у две димензије: КХФ

(а) Кретање честице у присуству $B_\perp$:



$m\frac{v^2}{R} \sim vB$ класично

(1) Квантовање орбиталног кретања (v)

$\Longrightarrow$

$$\hat{H} = \frac{\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} \longleftarrow$$ наелектрисање $q = -e$, $e > 0$ и облик H долази из класичне физике

– комбинација $\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} \approx m\vec{v}$ („механички импулс“)

$\vec{p}$ („канонски импулс“)

је оправдана јер је „gauge инваријантна“.

Зашто? Ако уведемо gauge трансформацију $\vec{A} \Rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ можемо наћи унитарну тј. фазну трансформацију $\psi \to \psi e^{-i\frac{e}{c}\Lambda}$ која нас води у почетни облик за $\vec{\pi}$ и тиме $\hat{H}$.

$$[\pi_x, \pi_y] = \left[p_x + \frac{e}{c}A_x, p_y + \frac{e}{c}A_y\right] =$$

$$= \frac{e}{c}\left([p_x, A_y] + [A_x, p_y]\right) = -i\frac{e}{c}B_z\hbar$$

ако $\vec{B} = -B\hat{e}_z$

$$[\pi_x, \pi_y] = i\frac{eB}{c}\hbar = i\frac{\hbar^2}{l_B^2} \qquad l_B = \sqrt{\frac{c\hbar}{eB}}$$

магнетна дужина

Ако уведемо

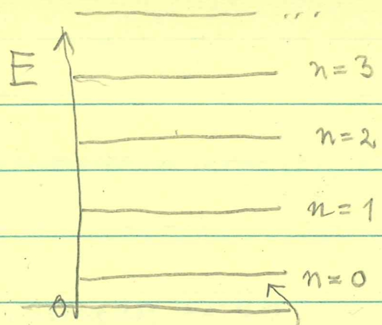
$$b = \frac{l_B}{\hbar}\frac{(\pi_x + i\pi_y)}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad b^+ = \frac{l_B}{\hbar}\frac{(\pi_x - i\pi_y)}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow [b, b^+] = 1$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{m l_B^2}\left(b^+b + \frac{1}{2}\right) = \hbar\left(\frac{eB}{mc}\right)\left(b^+b + \frac{1}{2}\right)$$

$\omega_c \to$ циклотронска фреквенција

$$\hat{H} = \hbar\omega_c\Big(\underbrace{b^+b}_{\substack{n\geq 0\\ \text{eigen-вредности}}} + \frac{1}{2}\Big).$$

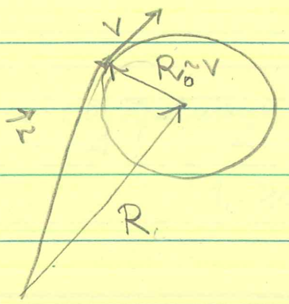


Ландау нивои

најнижи Ландау ниво (LLL)

(2) Квантовање простора:

класично



потребне су нам две варијабле: 1. $V(R_0)$ и 2. R да одредимо кретање честице ($\vec{R}$ – координата центра око које се честица окреће)

$$R_i = r_i + \epsilon_{ij}\Pi_j \frac{l_B^2}{\hbar}\ ; \qquad \epsilon_{ij}:\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$$

доказати: $\boxed{[R_x, R_y] = i\, l_B^2}$ Компоненте координате не комутирају!

⇒ Квантовање простора:

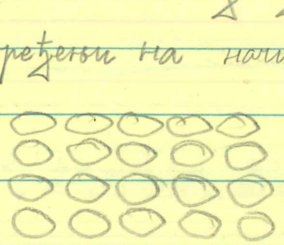
$$\left(\ \vdash\!\!-\!\!-\!\!\dashv L \qquad [x,p] = i\hbar \qquad \frac{\Delta P}{2\pi\hbar/L} = \frac{L\,\Delta P}{2\pi\hbar} \right)$$

овде $[x,y] = i\, l_B^2$,

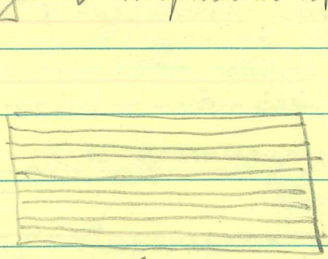
$$\frac{L_y}{2\pi\, l_B^2 / L_x} = \frac{L_x L_y}{2\pi\, l_B^2}$$

⟶ квант површине $= 2\pi l_B^2$ – ефективна површина једночестичног стања

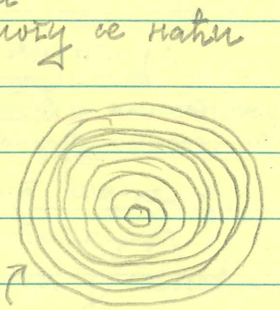
У зависности од gauge-а површина ортонормирана стања могу се наћи распоређени на начин.



као решетка



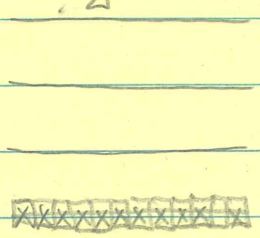
Ландау gauge



ротационо симетричан gauge

↑ Опис смо дали у фиксираном Ландау нивоу ($[R_i, \Pi_j] = 0$)

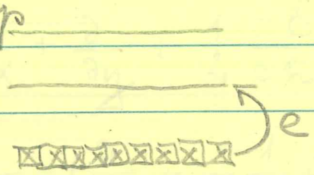
(б) Попуњени најнижи Ландау ниво



$$\sim \Psi_{\text{Slater}} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec r_1) & \psi_1(\vec r_2) & \psi_1(\vec r_3) \\ \psi_2(\vec r_1) & \ldots & \\ \psi_3(\vec r_1) & \ldots & \end{vmatrix}$$

= најпростији пример тополошког изолатора:

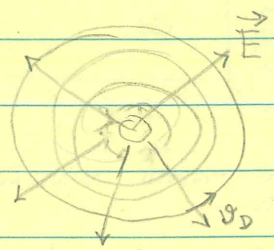
1. изолатор



$\Delta \neq 0$ "gap"

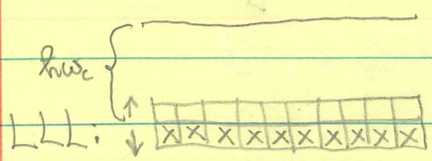
тј. енергетски процеп за ексцитовање наелектрисаних честица

2. тополошки



Можемо наћи репрезентацију система на начин јединственог вира (вортекса) – број вортекса = тополошки број

(в) КХФ — можемо имати спински степен слободе и због (1) сузбијања кинетичке енергије (сва стања у LLL имају исту кинетичку енергију без обзира на пројекцију спина)



(2) и доминације изменског члана у присуству интеракција

⇒ феромагнетно уређење у основном стању

$$\Rightarrow \Psi_0 = \Psi_{LLL}(\vec r_1, \ldots, \vec r_N) \cdot |\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \ldots \rangle$$

I) опис попуњеног LLL (најнижег Ландау нивоа) у ротационо-симетричном gauge-у:

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}\,, \quad \vec{B} = -B\hat{e}_z\,, \quad B>0$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{B}{2}(y, -x)$$

– стања која припадају LLL:

$$\hat{b}|\psi\rangle = 0 \quad \text{тј.} \quad (\Pi_x + i\Pi_y)\psi(\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \left[-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{eB}{c\hbar}(y - ix)\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{1}{l_B^2}(x+iy)\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{4}\frac{z}{l_B^2}\right]\psi(\vec{r}) = 0}$$

⇒ једночестични базис у LLL

$$\psi_n(\vec{r}) = \frac{z^n e^{-\frac{1}{4}|z|^2}}{\sqrt{2\pi l_B^2}\sqrt{2^n n!}} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\sqrt{N_n} = \sqrt{2\pi l_B^2}\sqrt{2^n n!}$$

$\Rightarrow$ Slater детерминанта попуњеног LLL :

$$\Psi_{LLL}(z_1,\dots,z_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\,\frac{1}{\prod\limits_{n=0}^{N-1}\sqrt{\mathcal{N}_n}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \cdots & z_N^2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ z_1^{N-1} & & \cdots & & z_N^{N-1} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\frac{|z_i|^2}{\ell_B^2}}$$

је Вандермонд детерминанта

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\,\frac{1}{\prod\limits_{n=0}^{N-1}\sqrt{\mathcal{N}_n}} \prod_{i<j}(z_i - z_j)\; e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\frac{|z_i|^2}{\ell_B^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P \operatorname{sgn}P\,\frac{z_{P(1)}^0}{\sqrt{\mathcal{N}_0}}\cdot\frac{z_{P(2)}^1}{\sqrt{\mathcal{N}_1}}\,\frac{z_{P(3)}^2}{\sqrt{\mathcal{N}_2}}\cdots\frac{z_{P(N)}^{N-1}}{\sqrt{\mathcal{N}_{N-1}}}\times$$

$$\times\, e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\frac{|z_i|^2}{\ell_B^2}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Lifshitz, Pitaevskii, Statistical Physics 2
2. Fetter, Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems

(КХФ) 4. Girvin, arXiv: cond-mat/9907002, The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries

(ХФ) 3. Ashcroft, Mermin, Solid State Physics

IV Задатак: Ферми системи и интеракције

IV. 1 (11)

(а) Наћи комутатор компоненти вектора центра обртања честице,

$$R_i = x_i + \epsilon_{ij} \Pi_j \frac{l_B^2}{\hbar}.$$

(б) Наћи радијалну дистрибуциону функцију таласне функције попуњеног најнижег Ландау нивоа,

$$g(|z|) = \frac{N(N-1)}{\rho^2} \int d^2 z_3 \cdots \int d^2 z_N \, |\Psi(0, z, z_3, \ldots, z_N)|^2,$$

где $\rho = \frac{1}{2\pi l_B^2}$. Доказати и користити једнакост, која важи у термодинамичком лимиту,

$$\sum_{m=0}^{N-1} |\Psi_m(z)|^2 = \rho, \text{ где су } \Psi_m(z)$$

нормализована једночестична стања најнижег Ландау нивоа,

$$\Psi_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi l_B^2}\sqrt{2^m m!}} e^{-\frac{1}{4}\frac{|z|^2}{l_B^2}}$$

у радијалном gauge-у.

(в) Наћи очекивану вредност интеракционе енергије у случају Coulomb интеракције, узевши у обзир и присуство униформе позадине позитивног наелектрисања.