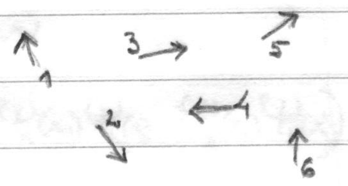
21

I Друга квантизација

(A) Идентичне честице?

(a) Класично:

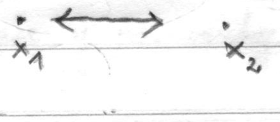


$1 \leftrightarrow 2$ ново микро стање!

– квантно не (и зашто би због релација неодређености)

(а) смањује простор стања

(б) фермиони и бозони:

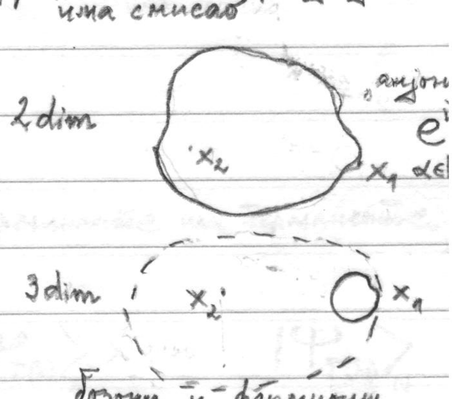


$$(1)\quad \Psi(x_1, x_2) = e^{i\varphi}\,\Psi(x_2, x_1)$$

$$(2)\quad e^{i2\varphi} = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = 0, \pi$$

из једнозначности таласне функције

= математичка дефиниција, могућа физичка реализација = дефиниција статистике као физичке величине: обилажење (сама фаза нема смисао, јер фаза на затвореној путањи има смисао



Један од основних принципа QM: објашњење многих феномена од Pauli принципа у атомској до суперфлуидности, суперпроводности, металног стања итд. у ФКМ (физици кондензоване материје)

Када је QM важна? de Broglie $\lambda \sim \frac{h}{p}$ и оцена p: $\frac{p^2}{2m} \sim \kappa T$ (идеалан гас)

$\longrightarrow \lambda \sim \frac{1}{\sqrt{mT}}$ је значајна (термална таласна дужина)

мала маса – He^4, He^3 изузетне квантне течности

„ниске температуре" – релативан појам и због интеракција (б) Друго изненађење $\boxed{\text{Спин}}$ – да би заиста схватили → одакле опис на високим енергијама – "једна честица приближава другој" у атомској, нуклеарној итд. где нема ни равном. распоређених јона кристалне решетке у којој електрон се креће, тј. транслаторна а нарочито ротациона симетрија нарушене.

Вишак симетрија → нови квантни бројеви (спин

Лоренцова група
релативистичке механике

⇒ Спин-статистика теорема (да би обезбедили локалну физику и избегли негативне

фермиони – полуцелобројни спин $\left(\frac{1}{2}\right)$

бозони – целобројни спин (0)

→ и у ФКМ (како не мора)

(в) Конкретизујемо:

$N = 2 \quad |\varphi_a\rangle \; |\varphi_b\rangle$ — b, a

$\varphi_a(x)\,\varphi_b(x)$

фермионско:

$$\psi^{f}_{ab}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_a(x_1)\varphi_b(x_2) - \varphi_a(x_2)\varphi_b(x_1)\right)$$

бозонска:

$$\psi^{b}_{ab}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\qquad + \qquad \right),$$

$\psi^{b}_{aa}(x_1,x_2)$, $\psi^{b}_{bb}(x_1,x_2)$ $\xRightarrow{\text{основна}}$

ферми — b — бозе

a

Опис могућ потпуностима!

(г) Формализам у различивој слици:

N честица $\quad \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$:

$$|\varphi_1\rangle_1 \times |\varphi_2\rangle_2 \times \cdots |\varphi_N\rangle_N \xRightarrow{QM} \text{детерминанте или перманенте}$$

$$|\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_N\rangle_\zeta = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P \zeta^P\, |\varphi_{P(1)}\rangle_1 \times |\varphi_{P(2)}\rangle_2 \times \cdots |\varphi_{P(N)}\rangle_N$$

(сума по пермутацијама)

група пермутација: S_N

$\zeta = -1$ ферми | $\zeta = +1$ бозе

$\zeta^P \equiv \operatorname{sgn} P$ | $\zeta^P = 1$

алтернативна | тривијална репрезентација

Нормализација φ_1, φ_2 : a, b

$$|a,a\rangle_{\zeta=1} = \sqrt{2}\,|a\rangle_1 \times |a\rangle_2 \;!$$

$$\langle \varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_N | \psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N\rangle = ?$$

$\equiv \zeta^P$ где P број транспозиција или измена

3

$$\stackrel{?}{=} \begin{vmatrix} \langle\varphi_1|\psi_1\rangle & & \langle\varphi_1|\psi_N\rangle \\ \langle\varphi_2|\psi_1\rangle & \cdots & \\ & & \\ \langle\varphi_N|\psi_1\rangle & & \langle\varphi_N|\psi_N\rangle \end{vmatrix}_\zeta$$

$(\langle\varphi_1|_1\langle\varphi_2|_2 \pm \langle\varphi_2|_1\langle\varphi_1|_2)$
$(|\psi_1\rangle_1|\psi_2\rangle_2 \pm |\psi_2\rangle_1|\psi_1\rangle_2)$

$= \langle\varphi_1|\psi_1\rangle_1\langle\varphi_2|\psi_2\rangle_2 + \langle\varphi_2|\psi_2\rangle_1\langle\varphi_1 \ldots$
$\pm\langle\varphi_1|\psi_2\rangle_1\langle\varphi_2|\psi_1\rangle_2 \pm \langle\varphi_2|\psi_1\rangle_1\langle\varphi_1 \ldots$

$= \langle\varphi_1|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\psi_2\rangle$
$\pm\langle\varphi_1|\psi_2\rangle\langle\varphi_2|\psi_1\rangle$

(1) нема потребе разликовати $\langle\ \rangle_1$ и $\langle\ \rangle_2$

(2) јако са сваким уз знак пермутације ?

исти једночестични простор

$$= \sum_P \zeta^P \langle\varphi_1|\psi_{P(1)}\rangle \cdots\cdots \langle\varphi_N|\psi_{P(N)}\rangle$$

Доказ: $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_N|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle =$

$$\frac{1}{N!}\sum_P\sum_Q \zeta^P\zeta^Q\left(\langle\varphi_{P(1)}|\times\cdots\times\langle\varphi_{P(N)}|\right)\left(|\psi_{Q(1)}\rangle\times\cdots\times|\psi_{Q(N)}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P\sum_Q \zeta^P\zeta^Q\langle\varphi_{P(1)}|\psi_{Q(1)}\rangle\cdots\langle\varphi_{P(N)}|\psi_{Q(N)}\rangle$$

↓ нови распоред

$$= \frac{1}{N!}\sum_P\sum_Q \zeta^P\zeta^Q\langle\varphi_1|\psi_{P^{-1}Q(1)}\rangle\cdots\langle\varphi_N|\psi_{P^{-1}Q(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P\sum_{Q\to P^{-1}Q=R}\zeta^{P^{-1}Q}\langle\varphi_1|\psi_{P^{-1}Q(1)}\rangle\cdots\langle\varphi_N|\psi_{P^{-1}Q(N)}\rangle$$

$$= \sum_R \zeta^R\langle\varphi_1|\psi_{R(1)}\rangle\cdots\langle\varphi_N|\psi_{R(N)}\rangle$$

$\langle\alpha_k|\alpha_l\rangle = \delta_{kl}$ $\{|\alpha_k\rangle;\ k=1,\ldots\}$ једночестични базис

(g) Нормализација: (1) фермиони Slater детерминанте ✓

(2) бозони $|a,a\rangle=\sqrt{2}\,|a\rangle_1|a\rangle_2$: $\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=2$, је норма^2

N

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{matrix} & & \\ & \begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix} & \\ & & \begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\end{matrix} \\ & & & \ddots \end{vmatrix} \Rightarrow |\alpha_{(1)}^1 \quad \alpha_{(n)}^N\rangle \times \frac{1}{\sqrt{n_{(1)}!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_{(2)}}} \qquad \sum_{i=1}^n n_{(i)} = N$$

(нормализовано стање)

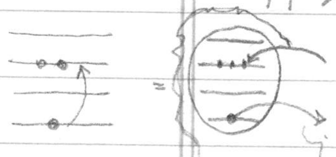
(Б) Репрезентација попуњености (стања)

— Уместо праћења и фиксирања броја честица и бриге о (анти)симетризацији говоримо о попуњености нивоа честицама. Оператори једноставнији!

— Честице могу да буду креиране и одстрањене (уништене).

Вишечестични простор (Фоков)

$$|\Psi\rangle = |\Psi^{(0)}\rangle + |\Psi^{(1)}\rangle + |\Psi^{(2)}\rangle + \cdots$$



$|\Psi^{(N)}\rangle$ – стање са N честица

$\langle\Psi^{(n)}|\Psi^{(m)}\rangle \sim \delta_{m,n}$ (ортогонална стања са различитим бројем честица)

Креациони и анихилациони оператори:

(a) $|\varphi\rangle$ – једночестично стање

перманента или детерминанта

$a^+(\varphi)|\psi_1,\dots,\psi_N\rangle = |\varphi,\psi_1,\dots,\psi_N\rangle$ креациони

$a(\varphi)$ адјунговани анихилациони

$$\langle\chi_1,\dots,\chi_{N-1}|a(\varphi)|\psi_1,\dots,\psi_N\rangle = \langle\psi_1,\dots,\psi_N|a^+(\varphi)|\chi_1,\dots,\chi_{N-1}\rangle^*$$

$$= \begin{vmatrix} \langle\psi_1|\varphi\rangle & \langle\psi_1|\chi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\chi_{N-1}\rangle \\ & & & \\ \langle\psi_N|\varphi\rangle & \langle\psi_N|\chi_1\rangle & & \langle\psi_N|\chi_{N-1}\rangle \end{vmatrix}_\xi^* = \sum_{k=1}^{N} \xi^{k-1} \langle\psi_k|\varphi\rangle^* \begin{vmatrix} \langle\psi_1|\chi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\chi_{N-1}\rangle \\ & \text{no } \psi_k & \\ \langle\psi_N|\chi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_N|\chi_{N-1}\rangle \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad a(\varphi)|\psi_1,\dots,\psi_N\rangle = \sum_{k=1}^{N} \xi^{k-1} \langle\varphi|\psi_k\rangle \, |\psi_1,\dots \text{no } \psi_k \dots,\psi_N\rangle \quad !$$

$[a^+(\varphi_1), a^+(\varphi_2)]_{-\xi} = 0$ примењујући деф. a^+

$[a(\varphi_1), a(\varphi_2)]_{-\xi} = 0$ адјунгована релација

5

(б) $\left[a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)\right]_{-\xi} = \;?$

$$a(\varphi_1)\,a^+(\varphi_2)\,|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle =$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\,|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle + \sum_{k=1}^{N}\xi^{k}\,\langle\varphi_1|\psi_k\rangle\,|\varphi_2,\psi_1,\ldots(\text{no }\psi_k),\ldots,\psi_N\rangle$$

$$a^+(\varphi_2)\,a(\varphi_1)\,|\psi_1,\ldots,\psi_N\rangle =$$

$$\sum_{k=1}^{N}\xi^{k-1}\,\langle\varphi_1,\psi_k\rangle\,|\varphi_2,\psi_1,\ (\text{no }\psi_k)\ ,\psi_N\rangle$$

$$\left[a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)\right]_{-\xi} = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle$$

Конкретније:

(в) једночестични базис $\{|\alpha_k\rangle;\ k=1,\ldots\}$

(1) бозони:

базис у реп. попуњености:

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle = \frac{|\alpha_1\alpha_1\ldots\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_2\ldots\rangle}{\sqrt{n_1!}\,\sqrt{n_2!}\,\ldots}$$

оператори

користити дефиницију

$$\underbrace{a_i|n_1 n_2 \ldots n_i \ldots\rangle}_{n_i \text{ пута анихилација}} = \sqrt{n_i}\,|n_1 n_2 \ldots (n_i-1)\ldots\rangle$$ и користити изведено дејство

$$a_i^+|n_1 n_2 \ldots n_i \ldots\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|n_1 n_2 \ldots (n_i+1)\ldots\rangle$$

(2) фермиони

само стања попуњена $1,\ldots,n$

$$|\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\rangle,$$

$$a_\alpha|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\rangle = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_{\alpha\alpha_k}|\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n\rangle$$

$$a^+_\alpha|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\rangle = |\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\rangle$$

често стања момента импулса

овако изабрали

$$\langle\vec p|\vec p\,'\rangle = (2\pi)^3\,\delta(\vec p-\vec p\,')$$ $\left(\underbrace{\int e^{i(\vec p-\vec p\,')\vec x}dx = (2\pi)^3\delta(\vec p-\vec p\,')}_{\text{важи из теорије Fourier тра}}\right.$ (може и $\langle\vec x|\vec p\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}e$

$$a^+(p_1)\ldots a^+(p_n)\underbrace{|0\rangle}_{\text{вакуум}}$$ нормализовано фермионско стање (како је бозонско $\frac{(a_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}|0\rangle$)

5.A

фермиони у репрезентацији попуњености
$$\{|\alpha_i\rangle;\ i=1,2\ \ldots;\ \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle=\delta_{kj}\}$$

$$|n_1 n_2 \ldots n_i \ldots\rangle \qquad \forall i \quad n_i=0 \vee n_i=1$$

$$|\underbrace{00\ 1\ 0\ 11}\,n_i\ \rangle$$

$\#1$ = број јединица пре i $\rightarrow$ $(-1)^{\#1}$ у опису анихилационог оператора

Увођењем креационих и анихилационих оператора са релацијама:

$$\{c_i,c_j\}=0\ ;\ \{c_i^+,c_j^+\}=0\ ,\ \{c_i,c_j^+\}=\delta_{ij}$$ $\{\}$ - антикомутат

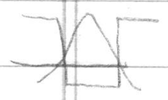
то је урађено.

Пример:

$|000\ldots0\rangle=|0\rangle$ $\qquad$ $|000\ 1_i \ldots 1_j\ 0\rangle=c_i^+c_j^+|0\rangle$

$$c_j(c_i^+c_j^+|0\rangle)=-c_i^+c_jc_j^+|0\rangle=-c_i^+(-c_j^+c_j+1)|0\rangle=-c_i^+|0\rangle$$

Пример: фермионски систем

ϵ 

стања $\Psi_\uparrow, \Psi_\downarrow$ енергије ϵ $\qquad$ простор $\{|0\rangle, c_\uparrow^+|0\rangle, c_\downarrow^+|0\rangle, c_\uparrow^+c_\downarrow^+|0\rangle\}$

$$\hat N=\sum_\sigma c_\sigma^+c_\sigma\ \{0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 2\}$$

$$\hat H=\sum_\sigma \epsilon c_\sigma^+c_\sigma\ \{0\ ,\ \epsilon\ ,\ \epsilon\ ,\ 2\epsilon\}$$

= дијагонални једночестични оператори

(В) Оператори у другој квантизацији

(једночестични и двочестични) (како избећи $\sum H_i$ итд) (ако већ имамо исте $\mathcal{H}_i$)

(а) Једночестични оператори

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \times \cdots \times |\psi_n\rangle \quad \text{(различиво)}$$

$$A|\Psi\rangle = \left(A\,|\psi_1\rangle\right) \times |\psi_2\rangle \times \cdots \times |\psi_n\rangle + |\psi_1\rangle \times \left(A\,|\psi_2\rangle\right) \times \cdots \times |\psi_n\rangle + \cdots + |\psi_1\rangle \times |\psi_2\rangle \times \cdots \times \left(A\,|\psi_n\rangle\right)$$

$$\delta A = |\alpha\rangle\langle\beta|$$

детерминанта или перманента

$$\delta A|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\beta|\psi_i\rangle\, |\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}, \alpha, \psi_{i+1}, \ldots \psi_n\rangle =$$

$$a^+(\alpha)a(\beta)|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \zeta^{i-1} \langle\beta|\psi_i\rangle |\alpha, \psi_1, \ldots \text{без } \psi_i, \ldots \psi_n\rangle =$$

Уопште:

$$\hat{A}^{(1)} = \sum_{\alpha,\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|A^{(1)}|\beta\rangle\langle\beta| \xrightarrow[\text{потпуности}]{\text{рел. }} \sum_{\alpha,\beta} a^+(\alpha)\,\langle\alpha|A^{(1)}|\beta\rangle\, a(\beta)$$

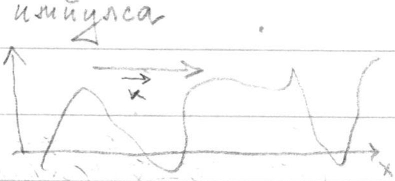
„друга квантизација" (bra, ket → оператори)

(Ставимо два разлагања јединице)

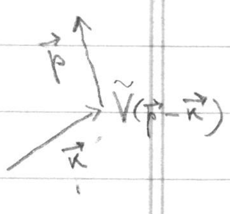
$$A^{(1)} = I \;\Rightarrow\; \hat{N} = \sum_{\alpha} a^+(\alpha)a(\alpha) \quad \text{оператор броја честица}$$

$$A^{(1)} = \hat{\vec{p}} \qquad \vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p}\, a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \quad \text{—''— импулса}$$

$$\{|\vec{p}\rangle;\ \vec{p}\}$$



$$\{|\vec{x}\rangle,\ \vec{x}\} \qquad \hat{V}^{(1)} = \int d\vec{x}\, V(x)\, a^+(\vec{x})\, a(\vec{x})$$



$$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle e^{-i\vec{x}\vec{p}} \;\Rightarrow\; a^+(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x}\vec{p}} a^+(\vec{p})$$

(1) $V(x) = \text{const}$ (хем. потенцијал) $= \displaystyle\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{\kappa}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\vec{p}-\vec{\kappa})\, a^+(\vec{p})\, a(\vec{\kappa})$

(2) нетривијално – предаја импулса

(б) Двочестични оператор

$$V|\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} V^{(2)}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)\,|\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\rangle$$

$$\longrightarrow \hat{V} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\int d^3\vec{y}\; a^+(\vec{x})\, a^+(\vec{y})\, V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y})\, a(\vec{y})\, a(\vec{x})$$

$\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}$

$$a(y)\,a(x)\,|x_1, \ldots, x_n\rangle = a(y)\sum_{i=1}^{n} \varsigma^{i-1}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)\,|x_1, \text{без } x_i, x_n\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\varsigma^{i-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\varsigma^{j-1}\,\eta^{ji}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x}_j)\,|x_1, \ldots, \text{без } x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle$$

$$\eta^{ji} = \begin{Bmatrix} 1 & j < i \\ -1 & j > i \end{Bmatrix}$$

$$a^+(x)\,a^+(y)\,a(y)\,a(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\varsigma^{i-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\varsigma^{j-1}\,\eta^{ji}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i)\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x}_j)\,|x, y, x_1, \text{без } x_i, x_j, x_n\rangle$$

$$\downarrow$$

интеракцијом $\longrightarrow |x_i, x_j, x_1, \text{без } x_i, x_j, x_n\rangle$

итд

(1) Важан облик a^+a^+aa а не $\underbrace{a^+a\,a^+a}_{} \sim \rho\cdot\rho$

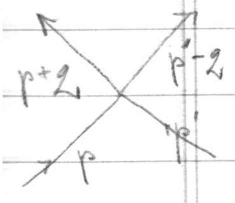
$\langle|a\; V\; a^+|0\rangle$ $= 0$ $\qquad \langle 0|a\; V\; a^+|0\rangle \neq 0$

$$e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}}\, e^{-i(\vec{p}'-\vec{q})\vec{y}}\, V(\vec{x}-\vec{y})\, e^{i\vec{p}'\vec{y}}\, e^{i\vec{p}\vec{x}}$$

$$= \int e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}\, V(\vec{q})$$

$$\delta(-\vec{P}'+\vec{p}'+\vec{q})\,\delta(-\vec{P}+\vec{p}+\vec{q})$$

(2) $V(\vec{x}-\vec{y})$ транслаторно инваријантна интеракција



$$V = \frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3}\,\tilde{V}(q)\; a^+(p+q)\,a^+(p'-q)\,a(p')\,a(p) \longleftarrow$$

Тотални моменат импулса задржава исту вредност $(\vec{p}+\vec{p}')$

(3)

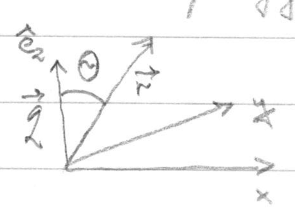
$$+\ \text{Спин} \longrightarrow \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \ldots\; a^+_{\sigma_1}(p+q)\, a^+_{\sigma_2}(p'-q)\, a_{\sigma_2}(p')\, a_{\sigma_1}(p)$$

7. A

Пример: Coulomb потенцијал $V(\vec{x}-\vec{y}) \sim \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

„дугодометна" интеракција

$$\tilde{V}(\vec{q}) \sim \int d\vec{r}\, \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{r}$$



$$= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; r^2 \cdot \frac{1}{r}\, e^{iqr\cos\theta}$$

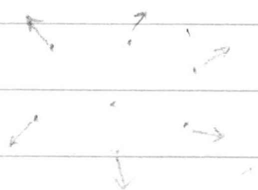
$$d\theta \sin\theta = d(-\cos\theta)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr\, \frac{1}{iq}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)$$ неодређен интеграл

узмимо зато $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r} e^{-\mu r}$

$$\tilde{V}_\mu(\vec{q}) \sim \frac{1}{iq}\left(-\frac{1}{iq-\mu} + \frac{1}{-iq-\mu}\right) \sim \frac{1}{q^2+\mu^2} \xrightarrow{\mu \to 0} \frac{1}{q^2}$$ сингуларитет за $q = 0$

Физички систем је нестабилан. Ако је систем електрона потребна су позитивна наелектрисања. Једна могућност позадина са униформном густином позитивног наелектрисања = средњој густини ел. система, $\bar{\rho}$



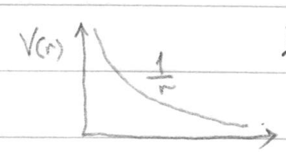
$$\hat{V}: \quad \rho(x)\rho(y) \longrightarrow (\rho(x)-\bar{\rho})(\rho(y)-\bar{\rho})$$

Детаљније у Fetter, Walecka: коначан систем запремине L^3

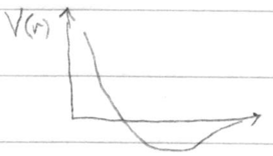
$$\hat{V} \longrightarrow \sum_{\substack{\vec{p},\vec{p}' \\ \vec{q}\neq 0}} V(\vec{q})\, a^+ a^+ a a \; !$$

↑

наелектрисани системи



неутрални системи: He^3, He^4 кв. течности



8 (Г) Важност друге квантизације! (језик многочестичних система) (и функционални запис и таласне функције су важне)

... Успостављање пертурбативног развоја у много-честичној физици

(а) Хајзенбергова слика

КМ: Шредингерова слика: Вектори стања зависе од времена, а оператори (правилима везани за физичке величине) обично не зависе од времена.

Претпоставка: H не зависи експлицитно од времена,

$\hbar = 1$: $(\hbar)\, i\dfrac{\partial|\Psi\rangle_s}{\partial t} = \hat{H}|\Psi_s\rangle \longrightarrow |\Psi_s(t)\rangle = |\Psi_s\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\Psi_s(0)\rangle$

$$\left(\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \Rightarrow i\frac{\partial\langle E_n|\Psi_s\rangle}{\partial t} = E_n\langle E_n|\Psi_s\rangle \Rightarrow |\Psi_s\rangle = \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|\Psi_s\rangle = \right.$$
$$\left. = \sum_n |E_n\rangle e^{-iE_nt}\langle E_n|\Psi_s(0)\rangle\right)$$

Хајзенбергова слика

$$\langle\Psi_s(t)|O_s|\Psi_s(t)\rangle = \langle\Psi_H|O_H(t)|\Psi_H\rangle$$

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{O}_s e^{-i\hat{H}t} \quad \Rightarrow$$

$$i\frac{\partial\hat{O}_H(t)}{\partial t} = [\hat{O}_H(t), \hat{H}]$$ једначина кретања оператора (физичке величине)

пример: $i\dfrac{\partial\hat{\rho}_H(t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_H(t) = 0$

аналог класичне једначине континуитета

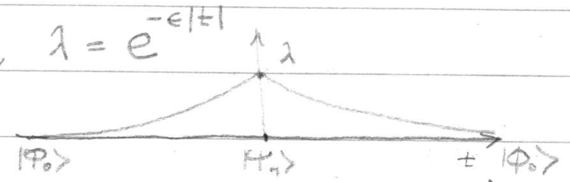
(б) Улога у поставци пертурбационог развоја

$$a(x) \to \hat{\Psi}(\vec{x}) = \int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}}, \quad H^0 = \sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\hat{\Psi}^0_H(\vec{x},t) = \int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega_{\vec{k}}t}\hat{a}_{\vec{k}}$$

$H = H_0 + \lambda H_1 \qquad \lambda < 1$ пертурбативни развој у КМ

Контролишемо са временском пертурбацијом $\lambda = e^{-\epsilon|t|}$



$H_0 \qquad t \to \pm\infty$

$H \qquad t = 0$ . . . Fetter, Walecka $\epsilon \to 0 \Longrightarrow$

временско уређење

$t > t' \sim O_H(t)\, O_H(t')$

$t' > t \sim O_H(t')\, O_H(t)$

$$\langle \Psi_H | T[O_H(t)\, O_H(t')] | \Psi_H \rangle \sim \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T[H_1^{H_0}(t_1) \cdots H_1^{H_0}(t_n)\, O_H^0(t)\, O_H^0(t')] \rangle_0$$

корелациона функција — корелатор у неинтерагујућем систему

↓

„Функција одзива": → сусцептибилност ($O_H \sim$ магнетизација), проводност ($O_H \sim$ струја), Холова проводност, термална проводност

→ дефиницију у Хајзенберговој слици

$O_H \sim$ густина — компресибилност

ЛИТЕРАТУРА:

1. Feynman, Statistical Mechanics

2. Fetter, Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems

I Задаци – Друга квантизација

I.1.(1) Квантитативно описати расподелу брзина у једном правцу у систему BEC у хармонијској замци фреквенце $\omega_\perp$ у xy равни и $\omega_\parallel$ у z правцу. Претпоставити Бозе гас неинтерагујућих атома масе m на температури T. Погледати wikipedia: Bose-Einstein condensate

I.2.(2) Описати основно стање тј. таласну функцију једнодимензионог система са три фермиона који не интерагују али су у хармонијској замци. Погледати: Vandermonde детерминанта.

I.3.(3) Разматрати фермионски систем спина $\frac{1}{2}$ са само једним стањем енергије ϵ. Хамилтонијан је дат изразом

$$\hat{H} = \sum_\sigma \epsilon c_\sigma^+ c_\sigma + \Delta c_\uparrow^+ c_\downarrow^+ + \Delta c_\downarrow c_\uparrow .$$

Наћи комутатор $[\hat{H}, \hat{N}]$ где $\hat{N} = \sum_\sigma c_\sigma^+ c_\sigma$ и решити eigen-проблем.

I.4.(4) Разматрати померени хармонијски осцилатор,

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + kx,$$

у репрезентацији креационих и анихилационих оператора

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right), \quad b^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right).$$

Наћи $[\hat{H}, \hat{N}]$ где $\hat{N} = b^+ b$.

Наћи померај d комплетирањем квадрата координате у $\hat{H}$ и нова eigen-стања примењујући оператор транслације $e^{id\hat{p}}$. Описати их у eigen-базису $\hat{N}$.