

Kuperova nestabilnost u polupopunjenom Landauvljevom nivou

Master rad

Luka Antonić



Fizički fakultet
Univerzitet u Beogradu
Mentor: Prof. Milica Milovanović
Septembar, 2018.

Ovaj rad je napisan u Laboratoriji za primenu računara u nauci (SCL) u okviru Instituta za fiziku u Beogradu. Zahvaljujem se administraciji na institutu za obezbjeđenje uslova za izradu rada. Posebno se zahvaljujem mentorki prof. Milici Milovanović za pruženu pomoć i korisne savjete u toku istraživačkog rada kao i na izradi master rada.

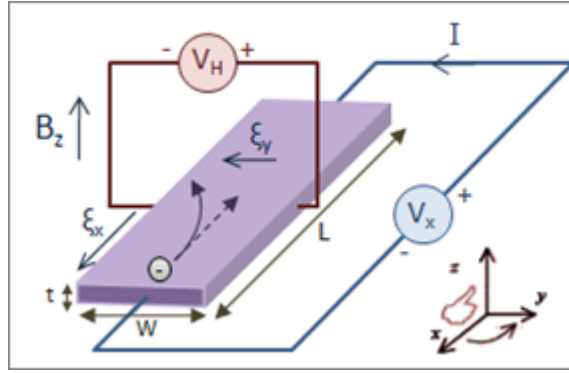
Sadržaj

1	Uvod	2
1.1	Klasični Holov efekat	2
1.2	Integralni kvantni Holov efekat	3
1.3	Fracioni kvantni Holov efekat	6
2	Polupopunjeni Landauvljev nivo	7
2.1	Halperin-Li-Rid teorija	7
2.2	Sonova teorija Dirakovog kompozitnog fermiona	8
3	Kuperova nestabilnost	12
3.1	Fraciono Holovo stanje na $\nu = \frac{5}{2}$	12
3.2	Sonova teorija sa dodatkom mase	13
3.3	Polarizacioni tenzor	14
3.3.1	Bezmaseni slučaj	15
3.3.2	Konačna masa	16
3.4	Kuperov kanal	17
3.4.1	p-wave sparivanje	18
3.4.2	Prelazak na konačno-temperaturni formalizam	19
3.4.3	Veza između $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}$ i $\Pi_{\mu\nu}$	21
3.4.4	Pozitivno-energetska komponenta Dirakovog spinora	21
3.4.5	Operator gustine	22
3.4.6	Transverzalna struja	23
3.4.7	Interakcioni potencijal	25
3.4.8	Statički limit	25
3.4.9	Nestatički slučaj	27
4	Zaključak	29
	Dodatak A Polarizacioni tenzor	29

1 Uvod

1.1 Klasični Holov efekat

Klasični Holov efekat otkrio je Edvin Hol 1879. godine u pokušaju da utvrdi da li magnetno polje djeluje na samu žicu ili na tada neotkrivene nosioce naelektrisanja - elektrone [1]. Klasični Holov efekat posljedica je klasičnog kretanja elektrona u magnetnom polju.



Slika 1: Postavka za eksperiment sa klasičnim Holovim efektom.

Dvodimenzionalni provodnik nalazi se u magnetnom polju koje je normalno na njega. Duž provodnika postoji električno polje, koje proizvodi longitudinalnu struju. Magnetno polje djeluje na elektrone preko Lorencove sile, tako da se akumuliraju naelektrisanja na jednoj strani provodnika. Usljed toga stvara se transverzalno električno polje koje, u konačnom materijalu, sprečava pojavu transverzalne struje i elektroni se kreću samo u longitudinalnom pravcu. Odnos između transverzalnog električnog polja i longitudinalne struje se naziva Holova otpornost i to je vandijagonalna komponenta tenzora otpornosti. Holov koeficijent definisan je kao količnik Holove otpornosti i jačine magnetnog polja:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B}. \quad (1.1)$$

Holov koeficijent značajan je zbog Drudeove teorije metala, što je klasična kinetička teorija primjenjena na metale sa parametrom srednjeg slobodnog vremena τ koje treba da obuhvati kolizione procese u metalu. U Drudeovom modelu Holov koeficijent zavisi samo od koncentracije nosioca naelektrisanja i od samog naelektrisanja:

$$R_H = \frac{1}{ne}. \quad (1.2)$$

Ovaj rezultat nije ispravan za većinu materijala: ne samo da postoji zavisnost koeficijenta od magnetnog polja, već i znak koeficijenta može biti pozitivan ili

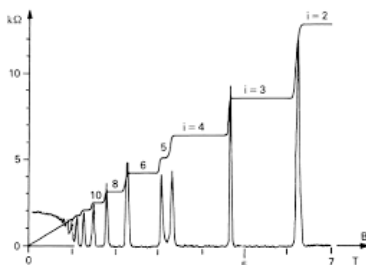
negativan u zavisnosti od toga da li su prenosioci elektroni ili šupljine. Za potpun tretman problema neophodna je kvantna teorija čvstih tijela.

1.2 Integralni kvantni Holov efekat

1980. godine von Klitzing, Dorda i Pepper [2] istraživali su Holov efekat na niskim temperaturama u domenu snažnog magnetnog polja i došli do neo-običnog otkrića za koje je von Klitzing-u 1985. dodijeljena Nobelova nagrada. Sistem koji su posmatrali je dvodimenzionalna površina silicijumskog MOSFET-a. Otkriveno je da Holova provodljivost iskazuje stepenasto ponašanje (kao na slici) pri čemu je njena vrijednost jednaka cjelobrojnom umnošku odnosa fundamentalnih fizičkih konstanti:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \nu, \quad (1.3)$$

dok je longitudinalna provodljivost σ_{xx} jednaka nuli. Ovi rezultati dobijeni su sa velikom preciznošću (u originalnom eksperimentu 5 ppm, a kasnije i sa mnogo većom)[3]. Odnos konstanti $\frac{2\pi\hbar}{e^2}$ naziva se i von Klitzingova konstanta i integralni kvantni Holov efekat je osnova za mjerenja ovog odnosa. Ispostavilo se da što je nered veći, to platoi koji se pojavljuju u Holovoj provodljivosti i otpornosti postaju istaknutiji.



Slika 2: Zavisnost otpornosti od jačine magnetnog polja (Integralni kvantni Holov efekat).

Teorijsko objašnjenje integralnog kvantnog Holovog efekta slijedi iz analize Landauovljevog problema, kvantnog problema čestice u magnetnom polju. Za razliku of frakcionog Holovog efekta, o kom će biti govora kasnije, u integralnom kvantnom Holovom efektu interakcije su zanemarene, te se može održati originalna jednočestična klasifikacija stanja, uzimajući u obzir kinematički uslov Paulijevog principa isključenja. Hamiltonijan je:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2. \quad (1.4)$$

Energetski spektar je spektar za kvadratni Hamiltonijan:

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (1.5)$$

gdje je $\omega_B = \frac{eB}{m}$ ciklotronska frekvencija koja određuje energetska razliku između susjednih Landauvljevih nivoa. Svaki od ovih nivoa je visoko degenerisan, egzaktnije broj kvantnih stanja po nivou je:

$$N = \frac{eBA}{2\pi\hbar}, \quad (1.6)$$

pri čemu je A površina uzorka. U skladu sa činjenicom da je uloga interakcije zanemarena u integralnom kvantnom Holovom efektu, lako se može provjeriti da se, kada je tačno ν Landauvljevih nivoa popunjeno, dobija upravo provodljivost koja je dobijena u von Klitzingovom eksperimentu.

Ovo, međutim, ne objašnjava pojavu platoa u grafiku zavisnosti provodljivosti (ili otpornosti) od jačine magnetnog polja. Uzrok pojave platoa su nečistoće, koje se modeliraju dodavanjem nekog slučajnog potencijala u Hamiltonijan. Ovaj potencijal mora da bude mali u odnosu na razmak između Landauvljevih nivoa $\hbar\omega_B$. Posljedica postojanja perturbacije je razbijanje degeneracije unutar energetskeg nivoa. Nečistoće, specifično, uzrokuju da većina stanja bude lokalizovana oko njih. Landauvljev nivo se širi tako da se lokalizovana stanja nalaze na krajevima, a delokalizovana na sredini nivoa. Samo mali broj stanja nije lokalizovan te na taj način učestvuje u transportnim svojstvima. Nakon što su popunjena sva delokalizovana stanja u određenom Landauvljevom nivou, smanjenjem magnetnog polja počinju se popunjavati stanja koja su lokalizovana oko nečistoća, koja ne doprinose Holovoj otpornosti, te stoga ona ostaje ista, tj. javlja se plato.

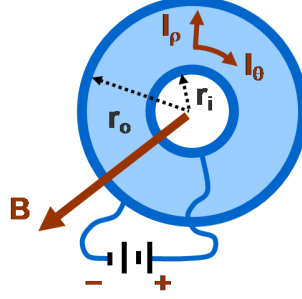
Ovo, međutim, ne objašnjava zašto je Holova provodnost egzaktno kvantizovana kao što je navedeno. Ukoliko je ν Landauvljevih nivoa popunjeno stanjima koja doprinose transportu dobija se tačno ta vrijednost. Ali, budući da lokalizovana stanja ne doprinose provodnosti, djeluje kao da delokalizovana stanja tačno nadomještaju tako da kvantizacija bude održana. Argument koji objašnjava ovaj fenomen zove se obično Laughlin-ov argument[25].

Razmatra se rotaciono-simetrična geometrija kao na slici. Argument ne bi trebalo da zavisi od geometrije, jer je kvantni Holov efekat u vezi sa *bulk-om* sistema. Ovakva geometrija omogućava dodavanje fluksa kroz centar diska, što je neophodan uslov za argument.

Pretpostavlja se da je ν Landauvljevih nivoa popunjeno i da se Fermi nivo nalazi između dva nivoa, tj. u dijelu u kom se nalaze lokalizovana stanja. Dodaje se adijabatski jedan kvant fluksa ($\Phi_0 = \frac{h}{e}$) kroz centar prstena.

Ukoliko se posmatraju talasne funkcije koje su svojstvena stanja za ovaj Hamiltonijan, ispostavlja se da, kada se doda jedan kvant fluksa (tada je početni Hamiltonijan jednak krajnjem do na gauge transformaciju), svako stanje pomjera u sljedeće stanje:

$$\Psi_m(\Phi_0) = \Psi_{m+1}(\Phi = 0), \quad (1.7)$$

Slika 3: *Korbinov disk.*

tako da je ukupni spektar nepromijenjen. Ukupni efekat jeste da se za svaki Landauvljev nivo po jedno stanje mora prebaciti iz unutrašnjeg prstena ka spoljašnjem. Ovo se može vidjeti iz primjera najnižeg Landauvljevog nivoa, gdje su stanja u simetričnom gauge-u forme:

$$\Psi_m \sim r^m e^{im\phi} e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}}. \quad (1.8)$$

Na slici su lokalizovana stanja označena svijetloplavom bojom, dok su delokalizovana stanja tamnoplava, na obodima prstena. Faradejev efekat:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int d\vec{l} \vec{E} = \int d\vec{l} \rho \vec{j} \quad (1.9)$$

pri adijabatskoj promjeni i za dodavanje jednog kvanta fluksa na obodima popunjenim provodnim stanjima daje Holovu otpornost od:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\nu e}{\Delta t} \rho_H \rightarrow \rho_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}. \quad (1.10)$$

Stanja u srednjem dijelu diska su lokalizovana, dodavanje fluksa ne može uticati na njih, njihov broj mora biti održan. Kada se delokalizovano stanje prebaci sa oboda u dio sa nečistoćama ono u kvantnom Holovom slučaju mora da prođe kroz taj dio. Provodna svojstva su ista kao za obod, tj. Holova provodnost je:

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (1.11)$$

Alternativni način posmatranja kvantnog Holovog efekta jeste efektivna teorija polja. Dejstvo koje obuhvata dinamiku Holovog efekta je čuveno Chern-Simons dejstvo:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (1.12)$$

A_μ nije dinamičko polje, već je emergentno gauge polje. Ono ne obuhvata početno magnetno polje koje dovodi do pojave Holovog stanja, već perturbacije

oko zadatog stanja, koje je npr. zadato fiksnim brojem popunjenosti. Ovaj član narušava parnost, što znači da se može pojaviti samo u sistemima koji narušavaju parnost. Iz člana se može pronaći Holova provodnost diferenciranjem po A_i :

$$J_i = \frac{\delta S_{CS}}{\delta A_i} = -\frac{k}{2\pi} \epsilon_{ij} E_j. \quad (1.13)$$

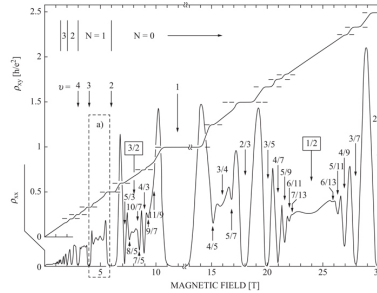
Holova provodnost je, dakle:

$$\sigma_{xy} = \frac{k}{2\pi}. \quad (1.14)$$

Iz uslova invarijantnosti particione funkcije na *velike* gauge transformacije, dolazi se do neophodnog uslova kvantizacije provodnosti: $k = \frac{e^2 \nu}{h}$. [4]

1.3 Frakcioni kvantni Holov efekat

Povećanjem čistoće uzoraka, otkriveno je da platoi u otpornosti na cjelobrojnim umnošcima von Klitzingove konstante postaju manje istaknuti, dok se javljaju novi platoi na različitim frakcionim umnošcima. Ovo su prvi put eksperimentalno otkrili Tsui i Stormer na uzorcima koje je pripremio Gossard. [5] Dakle, ν ne mora isključivo da bude cijeli broj, već može da bude racionalni broj. Prvo su primjećeni platoi na brojevima popunjenosti, $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$, a kasnije i na $\frac{5}{2}$ i $\frac{1}{2}$ što je slučaj kojom će se baviti ovaj rad.



Slika 4: Zavisnost Holove otpornosti od jačine magnetnog polja (Frakcioni kvantni Holov efekat).

U frakcionom Holovom efektu interakcije počinju da igraju ključnu ulogu. Interakcije podižu degeneraciju energetskeg nivoa. Međutim, primjena perturbacionog računa nije moguća, jer za bilo koju interakciju neophodno je raditi sa eksponencijalno degenerisanim Landauvljevim nivoom. Stoga, prve korake u teorijskom objašnjenju fenomena napravio je Laughlin sa probnom talasnom funkcijom za popunjenost $\nu = \frac{1}{m}$, gdje je m neparan cijeli broj:

$$\Psi(\{z_i\}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}, \quad (1.15)$$

u simetričnom gauge-u.

Već na ovoj talasnoj funkciji može se demonstrirati teorija kompozitnih fermiona, koji će igrati ključnu ulogu u razvoju ove oblasti fizike [11]. Jasno je da se talasna funkcija mora anulirati kada su pozicije dva elektrona ista, ali ne postoji *a priori* razlog da nula bude m -tog reda kao u Laughlin-ovoj talasnoj funkciji. Ideja je da se svakom elektronu dodaje $m - 1$ vorteksa. Ovakva konstrukcija se naziva kompozitni fermion. Da je riječ o vorteksima može se vidjeti ako se analizira Berry faza koja nastaje prilikom kretanja elektrona oko vorteksa. Model za vorteks je beskonačno tanki bezmaseni solenoid koji nosi sa sobom kvant fluksa.

Kompozitni fermioni vide drugačije magnetno polje od početnih elektrona:

$$B^* = B - 2pn\Phi_0, \quad (1.16)$$

gdje je Φ_0 kvant fluksa, a $2p$ je broj vorteksa.

Takođe, broj popunjenosti za kompozitne fermione drugačiji je od broja popunjenosti za elektrone:

$$\nu = \frac{\nu^*}{1 + 2p\nu^*}. \quad (1.17)$$

Na ovaj način vidimo da prelaskom na nove stepene slobode, tj. kompozitne fermione, frakcioni Holov efekat se može posmatrati kao integralni kvantni Holov efekat za kompozitne fermione, što objašnjava pojavu platoa na brojevima popunjenosti $\nu = \frac{1}{m}$.

$$\nu^* = 1 \rightarrow \nu = \frac{1}{m}. \quad (1.18)$$

2 Polupopunjeni Landauvljev nivo

Kao što će kasnije biti pokazano broj popunjenosti $\frac{1}{2}$ predstavlja zanimljiv slučaj. Ovo stanje su prvi put proučavali Halperin, Li i Rid[17], i zato se teorija često naziva HLR teorija. Nedavno je na osnovu simetrijskih razmatranja Son predložio efektivnu nisko-energetsku teoriju za polupopunjeni Landauvljev nivo, gdje je kompozitna čestica Dirakov fermion[6].

2.1 Halperin-Li-Rid teorija

Iako teorija kompozitnih fermiona daje dobro objašnjenje frakcionog kvantnog Holovog efekta, najkorisnija je u slučaju kada ne postoji Holov plato a to je na $\nu = \frac{1}{2}$. Primjenom rezultata iz prethodnog odjeljka na ovaj broj popunjenosti dobija se da je:

$$B^* = B - 2n\Phi_0 = 0. \quad (2.1)$$

Korisno je ponoviti osnove Chern-Simons Landau-Ginsburg teorije, koja je izložena u [18], budući da leži u osnovi HLR teorije. Kreće se od teorije intereagujućih elektrona Ψ_e u 2+1 dimenzija u pozadinskom magnetnom polju[19]:

$$\mathcal{L} = i\Psi_e^\dagger(\partial_t - iA_0)\Psi_e - \frac{1}{2m}|(\partial_i - iA_i)\Psi_e|^2 + \dots \quad (2.2)$$

Nakon prelaska na kompozitne fermione Ψ dobija se novi Lagranžijan:

$$\mathcal{L} = i\Psi^\dagger(\partial_t - iA_0 + ia_0)\Psi - \frac{1}{2m}|(\partial_i - iA_i + ia_i)\Psi|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \dots \quad (2.3)$$

Posljednji član je Chern-Simons član koji sadrži ideju dodavanja fluksa elektronima. To se može vidjeti ako se iz prethodnog Lagranžijana dobiju jednačine kretanja:

$$2\Psi^\dagger\Psi = \frac{b}{2\pi}, \quad b = \nabla \times \vec{a}. \quad (2.4)$$

Iz ovih jednačina se vidi da su magnetni fluksevi dinamičkog gauge polja vezani za poziciju kompozitnih fermiona, sa tačno dva kvanta fluksa po čestici. Osnove HLR teorije koja se koristi za proučavanje Holovog stanja na broju popunjenosti od jedne polovine, jeste u tome da se elektronima dodaju kvanti fluksa, pri čemu je broj novoformiranih kompozitnih fermiona jednak početnom broju čestica i da je u Chern-Simons član ugrađena ideja dodavanja fluksa.

Budući da kompozitni fermioni ne osjećaju magnetno polje, trebalo bi da grade Fermi more. Talasna funkcija za Fermi stanje je Slejterova determinanta:

$$\Psi = \det(e^{i\vec{k}_i \vec{r}_j}). \quad (2.5)$$

Međutim ova funkcija nije holomorfna, pa je neophodno projektovati na najniži Landauvljev nivo (LLL) za koji su talasne funkcije holomorfne i dodati dva vorteksa. Na ovaj način se dobija Rezayi-Read talasna funkcija inspirisana HLR teorijom:

$$\Psi = \mathcal{P}_{LLL} \left[\prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \det(e^{i\vec{k}_m \vec{r}_i}) \right]. \quad (2.6)$$

Kada se na Fermi more dodaju interakcije dobija se Landauvljeva teorija Fermi tečnosti. Fluktuacije u Chern-Simons gauge-polju su drugačije nego fluktuacije za običnu teoriju Fermi tečnosti, tako da je ovo stanje primjer ne-Fermijeve tečnosti.

2.2 Sonova teorija Dirakovog kompozitnog fermiona

Jedan od osnovnih problema HLR teorije u vezi je sa hijerarhijom energetskih skala, ali taj problem neće biti diskutovan budući da nije riješen ni u okviru Sonove teorije[19]. Postoji drugi problem koji je bio zanemarivan a vezan je za nepostojanje PH (particle-hole) simetrije unutar HLR teorije, tj. simetrije

između čestica i šupljina. S obzirom na to je Landauvljev nivo popunjen do polovine, ekvivalentan opis bi trebao da postoji sa šupljinama koje takođe popunjavaju Landauvljev nivo do jedne polovine.

Takođe, zahtjev simetrije za polupopunjeni Landauvljev nivo je da kompozitni fermioni imaju Holovu provodnost od $\sigma_{xy}^{CF} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{h}$, što nije moglo biti dobijeno unutar HLR teorije.

Sistem nerelativističkih elektrona koji interaguju dvočestičnom interakcijom ima dvije diskretne simetrije, \mathcal{P} i \mathcal{T} simetriju, tj. simetrije na inverziju prostora i vremena. Ukoliko se sistem stavi u uniformno magnetno polje obje ove simetrije se narušavaju, ali se održava kombinovana \mathcal{PT} simetrija. \mathcal{PT} simetrija djeluje na sljedeći način:

$$\mathcal{PT}\Psi(t, x_i, y_i) \rightarrow \Psi'(t, x_i, y_i) = \Psi^*(-t, x_i, -y_i). \quad (2.7)$$

Međutim posmatrani sistem, stanje na $\nu = \frac{1}{2}$, ima još jednu diskretnu simetriju, PH -simetriju, koja se može prikazati kao:

$$\Theta : |\text{prazan nivo}\rangle \rightarrow |\text{pun nivo}\rangle = \sum_{k=1}^M c_k^\dagger |\text{prazan nivo}\rangle, \quad (2.8)$$

gdje je M broj stanja u najnižem Landauvljevom nivou. Θ preslikava kreacione u anihilacione operatore i obratno. Može se pokazati da ova operacija preslikava dati Hamiltonijan u sebe uz dodatak člana sa hemijskim potencijalom:

$$\Theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu_0 \sum_k c_k^\dagger c_k. \quad (2.9)$$

Pod djelovanjem PH simetrije broj popunjenosti se preslikava kao:

$$\nu \rightarrow 1 - \nu. \quad (2.10)$$

To znači da se polupopunjeni nivo preslikava u samog sebe. Ova operacija takođe preslikava dva Jain-ova niza [11] koja leže sa dvije strane $\nu = \frac{1}{2}$ jedne u druge, tj. $\frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{n+1}{2n+1}$. HLR teorija od diskretnih simetrija ima samo \mathcal{PT} simetriju, dok prethodna dva niza predstavljaju integralna kvantna Holova stanja u kojima je popunjeno n , tj. $n + 1$ nivoa, što odražava asimetriju. Jedna od mogućnosti je da osnovno stanje Fermijeve tečnosti za polupopunjeni Landauvljev nivo spontano narušava PH simetriju. Međutim, numeričke analize ne idu u prilog ovoj tezi.

Zbog toga je Son predložio teoriju koja po svojoj konstrukciji održava ovu simetriju. Osnove Sonove teorije izložene su u radu[6] koji je objavljen 2015:

- Kompozitni fermion je Dirakova čestica.
- Kompozitna čestica se prebacuje sama u sebe prilikom PH operacije.
- Fermion ne sadrži Chern-Simons interakciju.

U okviru Sonove teorije, PH djeluje na sljedeći način:

$$\Theta : \vec{k} \rightarrow -\vec{k}. \quad (2.11)$$

PH simetrija se u literaturi o kvantnom Holovom stanju identifikuje sa \mathcal{CT} transformacijom, iako i \mathcal{CP} djeluje na isti način, budući da sistem uvijek ima \mathcal{PT} simetriju:

$$\mathcal{CT}c_m(\mathcal{CT})^{-1} = c_m^\dagger, \quad (2.12)$$

gdje je m oznaka za stanje.

Razlika je u tome što je \mathcal{CT} anti-unitarna, a \mathcal{CP} unitarna transformacija. Iskoristićemo izraz za normalizovani Dirakov spinor sa konvencijom u vezi sa oblikom gama-matrice iz originalnog Sonovog rada $\gamma^\mu = (\sigma^3, i\sigma^2, -i\sigma^1)$. Dobija se sljedeći normalizovani Dirakov spinor:

$$\Psi_{\vec{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{q_-}{q} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

\mathcal{CT} djeluje kao $i\sigma_2$, s tim što je neophodno izvršiti konjugaciju kompleksnih vrijednosti, budući da je \mathcal{T} anti-unitarni operator. Ψ se transformiše kao:

$$\Psi_{\vec{q}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{q_+}{q} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

$\frac{q_+}{q}$ i $\frac{q_-}{q}$ se mogu predstaviti kao fazni faktori, ako je $\theta_{\vec{q}}$ ugao koji vektor \vec{q} zaklapa sa x-osom:

$$\frac{q_-}{q} = e^{-i\theta_{\vec{q}}}; \quad \frac{q_+}{q} = e^{+i\theta_{\vec{q}}}. \quad (2.15)$$

Transformisano stanje se može predstaviti kao:

$$e^{i\theta_{\vec{q}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{q_-}{q} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

što je do na fazni faktor početno stanje sa suprotnim impulsom $-\vec{q}$. Kompozitna čestica se ne preslikava u kompozitnu šupljinu, već u drugu česticu suprotnog impulsa, tj. Fermi disk se preslikava sam u sebe.

Budući da u okolini Fermijejevog nivoa, Fermi tečnosti Dirakovih fermiona i nerelativističkih čestica imaju linearnu disperziju, ove dvije teorije se ne razlikuju značajno. Osnovna razlika između teorija je što se javlja Beri faza od $\pm\pi$ nakon što Dirakov fermion obiđe Fermi površ, koja je, kao što je pokazao Haldane[21], u vezi sa anomalnom Holovom provodnošću.

$$\sigma_{xy}^{CF} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad (2.17)$$

gdje je γ Berry faza.

Ovo se podudara sa zahtjevom koji nalaže PH simetrija, a to je da Holova provodnost za kompozitne fermione bude $-\frac{1}{2} \frac{e^2}{2\pi\hbar}$ [22].

Za ovu teoriju je neophodno da Dirakov fermion bude bezmasena čestica, jer dodavanje masenog člana u Lagranžijan narušava PH simetriju. Međutim, u sljedećem odjeljku će biti analizirana varijanta teorije sa masom, koja narušava tu simetriju. Dodavanjem mase se mijenja i Berry faza[7].

Berry faza

Jedna od reprezentacija Dirakovog spinora sa masom je[7]:

$$\Psi_{\vec{q}} = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_{\vec{q}} - m)^2 + q^2}} \begin{bmatrix} e^{-i\theta_{\vec{q}}}(\epsilon_{\vec{q}} - m) \\ iq \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Berry koneksija je $\vec{\mathcal{A}}(\vec{q}) = i\langle\Psi_{\vec{q}}|\partial_{\vec{q}}|\Psi_{\vec{q}}\rangle$, dok je Berry krivina $\Omega_{\vec{q}} = \partial_{k_x}\mathcal{A}_y - \partial_{k_y}\mathcal{A}_x$. Integraljenjem Berry krivine po impulsnom prostoru dobija se Beri faza. Beri koneksija za Dirakov maseni spinor je:

$$\mathcal{A}^i = -\epsilon^{ij}\frac{q_j}{q}\left(1 - \frac{q^2}{(\epsilon_{\vec{q}} - m)^2 + q^2}\right). \quad (2.19)$$

Iz koneksije se dobija Berry krivina:

$$\Omega_{\vec{q}} = \frac{m}{2(q^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.20)$$

Berry faza za provodni pojas je:

$$\gamma = \int_{q < k_f} d^2\vec{q} \Omega_{\vec{q}} = \pi \text{sign}(m) \left(1 - \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + k_F^2}}\right), \quad (2.21)$$

što daje Holovu provodnost:

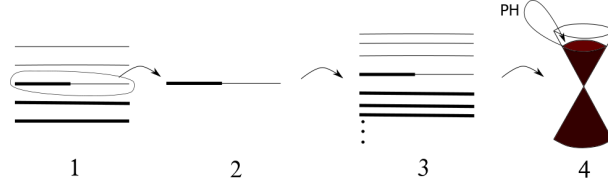
$$\sigma_{xy}^C = \frac{\text{sign}(m)}{4\pi} \left(1 - \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + k_F^2}}\right) \frac{e^2}{h}. \quad (2.22)$$

U limitu nulte mase, dobija se tačno Berry faza od π . S druge strane Holova provodnost za valentni pojas je:

$$\sigma_{xy}^V = -\frac{\text{sign}(m)}{4\pi} \frac{e^2}{h}. \quad (2.23)$$

Sonova efektivna teorija se može prikazati kao na slici 5. Dirakovi fermioni u magnetnom polju u limitu slabog kuplovanja, kada se sva relevantna fizika odigrava na nultom nivou, se preslikavaju na problem $\nu = \frac{1}{2}$ Holovog stanja. Teorija sa Dirakovim fermionima ima PH simetriju, te je stoga neophodno da stanje $n = 0$ ima ekvivalentan opis preko čestica i šupljina, tj. da je popunjenost $\frac{1}{2}$. Kada ne bi bilo interakcija ovaj nivo bi bio izuzetno degenerisan, ali interakcije podižu degeneraciju.

Son daje vezu između elektromagnetnih odziva ove dvije teorije. Berry faza od π kod Dirakovih fermiona omogućava da Holova provodnost za kompozitne čestice bude $-\frac{1}{2}$.



Slika 5: Kreće se od problema u kom je jedan od Landauvljevih nivoa za nerelativističke čestice popunjen do polovine (1); zatim se izoluje polupopunjeni nivo (2). Ovaj sistem se poredi sa Dirakovim česticama u magnetnom polju (energetski nivoi su $E_n = \pm\sqrt{2Bn}$), pri čemu je popunjeno beskonačno more negativno-energetskih čestica (3). Formulise se efektivna nisko-energetska teorija neutralnih kompozitnih Dirakovih fermiona na konačnom hemijskom potencijalu, za koji se prilikom PH transformacije kompozitni fermioni preslikavaju sami u sebe (4).

Son zatim konstruiše nisko-energetsku fenomenološku teoriju u kojoj su kompozitni fermioni neutralne Dirakove čestice koje ne sadrže Chern-Simons interakciju. Koristi se dualnost između teorije kompozitne Fermijeve tečnosti na polupopunjenom Landauvljevom nivou i kvantne elektrodinamike u (2+1) dimenziji. Teorija daje uspješnu predikciju relevantnih fizičkih veličina, poštujući PH simetriju i dajući uspješnu predikciju Holove provodnosti od $\frac{1}{2}$ i poštujući fenomenološke zahtjeve, kao npr. da teorija opisuje Fermi tečnost.

Minimalna verzija teorije sa Dirakovim kompozitnim fermionom data je Lagranžijanom:

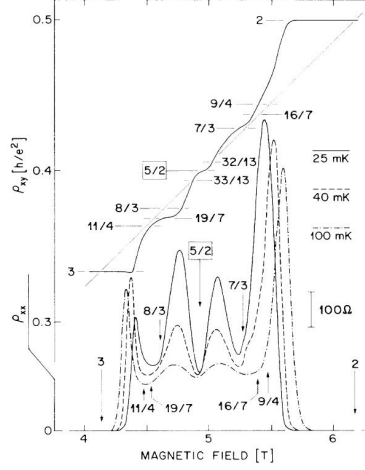
$$\mathcal{L} = i\Psi^\dagger[\partial_t - ia_0 - v_F\sigma^i(\partial_i - ia_i)]\Psi - \frac{1}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu a_\rho + \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho. \quad (2.24)$$

Kinetički član sadrži Fermijevu brzinu što je parametar određen mikroskopskom fizikom. Posljednji član je uključen kako bi se dodao doprinos negativno-energetskog mora kompozitnih fermiona Holovoj provodnosti. Uključivanje člana *ada* isključilo bi mogućnost postojanja PH simetrije.

3 Kuperova nestabilnost

3.1 Frakciono Holovo stanje na $\nu = \frac{5}{2}$

Na osnovu teorije kompozitnih fermiona ustanovljeno je da se frakciona Holova stanja javljaju na neparnim imeniocima u broju popunjenosti, dok se za slučaj parnih imenioca javljaju Fermi tečnosti. Stoga je bilo neobično otkriće Holovog platoa na $\nu = \frac{5}{2}$, koje su prvi put eksperimentalno postigli Willet et al.[26] (1987). Sistem na kome je osmotren ovaj plato je heterostruktura GaAs/AlGaAs.


 Slika 6: *Holov plato na $\frac{5}{2}$.*

Bilo je jasno da Holovo stanje na $\frac{5}{2}$ ima drugačiji empirijski karakter od dotad otkrivenih stanja. Kao rješenje problema predloženo je sparivanje kompozitnih fermiona (kao u BCS teoriji superprovodnosti), prvo u d-wave kanalu što inspiriše Haldane-Rezayi talasnu funkciju, a zatim u p-wave kanalu pfafijansko ili Moore-Read stanje. Način na koji se pfafijansko stanje javlja unutar p-wave BCS tretmana biće skiciran kasnije. U Sonovom radu se javlja novo stanje, tzv. PH-Pfafijan, pfafijansko stanje koje je PH-simetrično.

Numerički proračuni su davali prednost pfafijanskom i anti-pfafijanskom stanju. Anti-pfafijansko stanje je PH konjugat Moore-Read stanja. Postoji problem distinkcije između ovih stanja, jer sva daju istu Holovu provodnost. Jedan od načina da se razlikuje jeste da se mjeri termalna Holova provodnost: $\kappa_{xy} = c \frac{(\pi k_B)^2 T}{3h}$, gdje $c = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ i $\frac{7}{2}$ odgovaraju anti-pfafijanskom, pfafijanskom i PH-pfafijanskom stanju, redom. Eksperiment koji su 2018. izveli Banerjee et al.[27] daje vrijednost termalne Holove provodnosti $c = \frac{5}{2}$.

U ovom radu analizira se mogućnost stabilizacije PH-pfafijanskog stanja unutar RPA aproksimacije dodatkom mase, koja simulira miješanje između Landaujevih nivoa.

3.2 Sonova teorija sa dodatkom mase

Analizira se varijanta Sonove teorije [6] sa dodatkom mase. Kreće se sa Lagranžijanom koji je dat sljedećim izrazom [20]:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ia_\mu)\Psi + \frac{1}{4\pi}adA + \frac{1}{8\pi}AdA - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{m}{|m|}\frac{1}{8\pi}ada. \quad (3.1)$$

Ψ predstavlja polje Dirakovog kompozitnog fermiona a a_μ je emergentno

$U(1)$ gauge polje. AdA je skraćeni zapis za $\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho$. Linearni odziv sistema se dobija unutar RPA aproksimacije[8], ekspanzijom efektivnog dejstva do kvadratnog člana po a_ν , kao:

$$j_\mu^\Psi = \Pi_{\mu\nu}a^\nu. \quad (3.2)$$

$\Pi_{\mu\nu}$ je polarizacioni tenzor koji je dat izrazom:

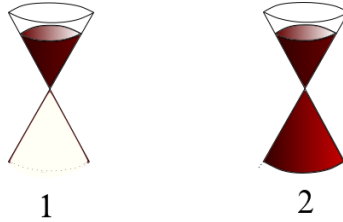
$$\Pi_{\mu\nu} = -itr[\gamma_\mu S_F(x, y)\gamma_\nu S_F(y, x)]. \quad (3.3)$$

$S_F(x, y)$ je fermionski propagator:

$$iS_F(x, y) = \langle T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) \rangle. \quad (3.4)$$

Ova formulacija teorije podrazumijeva Pauli-Villars regularizaciju, o kojoj će biti diskusije u dijelu u kom se određuje polarizacioni tenzor. U Pauli-Villars regularizaciji, ultraljubičaste divergencije se uklanjaju tako što se razmatra samo provodni pojas. Zbog toga se čak i u limitu kad je masa jednaka 0 dobija anomalna Holova provodnost od $\frac{1}{2}$, što se može vidjeti iz dijela u kom je određivana Berry faza i zbog toga je neophodno dodati Chern-Simons član. Ovakva formulacija daje HLR teoriju u limitu beskonačne mase[6] i na taj način je obezbjeđena veza između HLR i Sonove teorije.

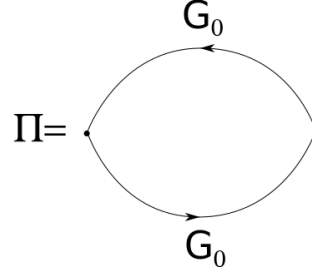
Sonova teorija je originalno formulisana sa dimenzionom regularizacijom u vidu, pri čemu se sumiraju doprinosi od provodnog i valentnog pojasa (beskonačnog mora negativno-energetskih Dirakovih fermiona). Tada se, na osnovu prethodnog računa vidi da je Holova provodnost za Dirakove fermione 0, što daje simetrijski zahtjevanu Holovu provodnost elektrona od $\frac{1}{2}$.



Slika 7: 1-Pauli-Villars regularizacija; 2-Dimenziona regularizacija.

3.3 Polarizacioni tenzor

Analiza za polarizacioni tenzor za Dirakov kompozitni fermion u 2+1 dimenzije već je ranije urađena u bezmasenom slučaju[9]. Glavni rezultati tog računa će biti dati u prvom odjeljku, a u drugom će biti prezentovan račun za maseni slučaj. Oba računa su rađena u hidrodinamičkom limitu ($|\vec{k}| \ll |\vec{q}| \sim \mu$), gdje je sa \vec{q} označen unutrašnji impuls a sa \vec{k} probni u impulsnoj reprezentaciji propagatora i polarizacionog tenzora. Koristi se RPA aproksimacija koja podrazumijeva uzimanje samo propagatora nultog reda u polarizacionom tenzoru:



Slika 8: Dijagram za polarizacioni tenzor u RPA aproksimaciji. Na svakom verteksu nalazi se po jedna gama-matrica.

3.3.1 Bezmaseni slučaj

Fajnmanov propagator u impulsnoj reprezentaciji za Dirakov fermion u bezmasenom slučaju dat je sa:

$$G^0(q_0, \vec{q})|_{m=0} = i\gamma^0 \left(\frac{\Lambda_q^{(-)}}{q_0 - |\vec{q}| + i\eta[\theta(|\vec{q}| - \mu) - \theta(\mu - |\vec{q}|)]} + \frac{\Lambda_q^{(+)}}{q_0 + |\vec{q}| - i\eta} \right), \quad (3.5)$$

gdje je $\Lambda_q^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{\vec{\alpha}\vec{q}}{|\vec{q}|})$, a $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$. η je mala vrijednost koja obezbjeđuje konvergenciju i čiji predznak obezbjeđuje kauzalnost. Uzima se sljedeća konvencija za gama-matrice: $\gamma^\mu = (\sigma^3, i\sigma^1, i\sigma^2)$.

Opšti izraz za polarizacioni tenzor u hidrodinamičkom limitu je[9]:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & -\frac{i}{(2\pi)^3} \\ & \times \int dq_0 d^2\vec{q} \left[\frac{(g^{\mu 0} + \frac{\vec{q}^\mu}{|\vec{q}|})(g^{\nu 0} + \frac{\vec{q}^\nu}{|\vec{q}|})}{(q_0 - |\vec{q}| + i\eta[\theta(|\vec{q}| - \mu) - \theta(\mu - |\vec{q}|)])(q_0 + k_0 - |\vec{q} + \vec{k}| + i\eta[\theta(|\vec{q} + \vec{k}| - \mu) - \theta(\mu - |\vec{q} + \vec{k}|)])} \right. \\ & + \left(-g^{\mu\nu} + g^{\mu 0}g^{\nu 0} - \frac{\vec{q}^\mu\vec{q}^\nu}{|\vec{q}|^2} \right) \times \left(\frac{1}{(q_0 + |\vec{q}| - i\eta)(q_0 + k_0 - |\vec{q} + \vec{k}| + i\eta[\theta(|\vec{q} + \vec{k}| - \mu) - \theta(\mu - |\vec{q} + \vec{k}|)])} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{(q_0 - |\vec{q}| + i\eta[\theta(|\vec{q}| - \mu) - \theta(\mu - |\vec{q}|)])(q_0 + k_0 + |\vec{q} + \vec{k}| - i\eta)} \right) \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

Notacija \vec{q}^μ označava da, kada je $\mu = 0$, $\vec{q}^\mu = 0$, a kada je μ prostorni indeks, $\vec{q}^\mu = q^\mu$. Koordinatni sistem može biti pogodno izabran tako da je vektor $\vec{k} = (|\vec{k}|, 0)$.

Iz prethodnog izraza dobija se (00) komponenta polarizacionog tenzora:

$$\Pi^{00}(k) = \frac{\mu}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{k_0^2}{k^2}} \theta(k^2) - 1 - i\sqrt{\frac{k_0^2}{-k^2}} \theta(-k^2) \right). \quad (3.7)$$

Ostale komponente tenzora su:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{0x}(k) &= \frac{k_0}{|\vec{k}|} \Pi^{00}(k) \\
 \Pi^{0y}(k) &= 0 \\
 \Pi^{xx}(k) &= \frac{k_0^2}{|\vec{k}|^2} \Pi^{00}(k) \\
 \Pi^{yy}(k) &= \frac{\mu}{2\pi} - \frac{k_0^2 - |\vec{k}|^2}{|\vec{k}|^2} \Pi^{00}(k) \\
 \Pi^{xy}(k) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ovo se kompaktnije može zapisati kao:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{0i}(k) &= k_0 \frac{k^i}{|\vec{k}|^2} \Pi^{00}(k) \\
 \Pi^{ij}(k) &= \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \left(\frac{\mu}{2\pi} - \frac{k_0^2 - |\vec{k}|^2}{|\vec{k}|^2} \Pi^{00}(k) \right) + \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \frac{k_0^2}{|\vec{k}|^2} \Pi^{00}(k).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

U proračunu je korištena Pauli-Villars regularizacija za uklanjanje divergencija, a za cut-off se dobija da je 0 korišćenjem Ward-ovog identiteta:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0. \tag{3.10}$$

3.3.2 Konačna masa

U slučaju Dirakovog kompozitnog fermiona konačne mase disperziona relacija ima formu $\epsilon_{\vec{q}} = \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}$, a odgovarajući propagator u impulsnoj reprezentaciji moguće je izračunati iz izraza za propagator u koordinatnoj reprezentaciji, datom u referenci [10].

$$\begin{aligned}
 iS_F(x, y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_0} \left[(\gamma q + m) \times \theta(q_0 - \mu) e^{-iq(x-y)} \right] \\
 &- \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_0} \left[(\gamma q + m) \times \theta(\mu - q_0) e^{-iq(x-y)} + (\gamma q - m) e^{iq(x-y)} \right].
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Korišćenjem integralne reprezentacije step-funkcije:

$$\theta(x^0 - y^0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega + i\eta}, \tag{3.12}$$

i zamjenom $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$ u posljednji integral, slijedi da je:

$$G^0(q_0, \vec{q})|_{m \neq 0} = i\gamma^0 \left(\frac{\Omega_q^{(-)}}{q_0 - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} + i\eta[\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \mu) - \theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2})]} + \frac{\Omega_q^{(+)}}{q_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - i\eta} \right). \quad (3.13)$$

Projektori Ω_q^\pm su definisani kao:

$$\Omega_q^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\vec{\alpha}\vec{q}}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \mp \frac{m\gamma^0}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right) = \Lambda_q^{(\pm)} \mp \frac{m\gamma^0}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}. \quad (3.14)$$

S obzirom na to da je račun za polarizacioni tenzor prilično dugačak, biće dat u appendix-u. Komponente polarizacionog tenzora u masenom slučaju mogu se kompaktno zapisati u poređenju sa bezmasenim slučajem, za koji će komponente biti označene sa tildom. Biće korišten skraćeni zapis za faktor reskaliranja koji se javlja u rezultatu: $\alpha_F = \frac{q_f}{\sqrt{q_F^2 + m^2}}$.

$$\Pi^{00}(k_0, \vec{k}) = \tilde{\Pi}^{00}(k_0, \alpha_F \vec{k}); \quad (3.15)$$

$$\Pi^{0i}(k_0, \vec{k}) = \alpha_F \tilde{\Pi}^{0i}(k_0, \alpha_F \vec{k}) + e^{ji} \left(-\frac{ik_j m}{4\pi} - i\frac{k_j m}{2\mu^2} \right) \tilde{\Pi}^{00}(k_0, \alpha_F \vec{k}); \quad (3.16)$$

$$\Pi^{ij}(k_0, \vec{k}) = \alpha_F^2 \tilde{\Pi}^{ij}(k_0, \alpha_F \vec{k}). \quad (3.17)$$

3.4 Kuperov kanal

G. Moore i N. Read su 1991. predložili stanje za polupopunjeni nivo koje ima sljedeći oblik[23]:

$$\Psi(\{z_i\}) = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m. \quad (3.18)$$

Izostavljen je gausijanski faktor, koji se uvijek javlja u simetričnom gauge-u. Talasna funkcija je anti-simetrična, tj. fermionska, ako je m parno, za razliku od Laughlin-ovog stanja. Sa Pf označen je objekat koji se naziva Pfafijan. U matematici je uvijek moguće zapisati determinantu antisimetrične matrice M_{ij} kao kvadrat polinoma po matričnim elementima. Taj polinom se naziva Pfafijan, i može se zapisati kao:

$$\text{Pf}(M) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} (\frac{N}{2})!} \sum_P \text{sign}(P) \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} M_{P(2i-1), P(2i)}. \quad (3.19)$$

Ispostavlja se da Moore-Read stanje predstavlja stanje koje nastaje usljed BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) nestabilnosti na sparivanje, koje nastaje na Fermi tečnosti kompozitnih fermiona. U sljedećem odjeljku će biti skicirano kako dolazi do toga, što je teorija koju su postavili Read i Green[24].

3.4.1 p-wave sparivanje

U elementarnoj BCS teoriji sparuju se dva elektrona sa suprotnim spinom, tako da je orbitalni dio s-wave ($l=0$). Kompozitni fermioni u polupopunjenom Landauvljevom nivou, s druge strane, imaju spinove iste orijentacije, tako da antisimetričnost talasne funkcije mora dolaziti od orbitalnog dijela, a najprostiji izbor je p-wave. Dodatno, ispostavlja se da je za Holovu fiziku relevantna $p_x + ip_y$ superprovodnost. Talasna funkcija koja se javlja u tom slučaju, u limitu slabog sparivanja, ima pfafijansku formu.

Efektivni BCS Hamiltonijan je:

$$H_{eff} = \sum_{\vec{k}} [\xi_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} + \frac{1}{2} (\Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}} c_{\vec{k}} + \Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger)], \quad (3.20)$$

gdje je $\xi_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}} - \mu$, $\epsilon_{\vec{k}}$ jednočestična kinetička energija, $\Delta_{\vec{k}}$ "gap" funkcija, a $-\mu$ treba posmatrati (u kontekstu Holove fizike) kao niskoenergetski limit od $\xi_{\vec{k}}$, budući da se kinetička energija za malo \vec{k} ponaša kao $\frac{k^2}{2m^*}$.

"Gap" funkcija se bira tako da ima p-wave simetriju pri malim impulsima:

$$\Delta_{\vec{k}} \sim \Delta(k_x - ik_y), \quad (3.21)$$

gdje je Δ konstanta.

Neki od osnovnih rezultata BCS teorije će biti ponovljeni. Osnovno stanje je dato sa:

$$|\Omega\rangle = \prod_{\vec{k}}' (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger) |0\rangle, \quad (3.22)$$

gdje primovanje označava da se svaki Kuperov par uzima u sumi samo jedanput.

Bogoljubovljevom transformacijom Hamiltonijan se prevodi u:

$$H_{eff} = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \text{const}, \quad (3.23)$$

gdje su $\alpha_{\vec{k}}$ anihilacioni operatori za Bogoljubone.

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} c_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}}^\dagger. \quad (3.24)$$

Važe sljedeće relacije:

$$\begin{aligned}
 E_{\vec{k}} &= \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}, \\
 \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} &= -\frac{E_{\vec{k}} - \xi_{\vec{k}}}{\Delta_{\vec{k}}^*}, \\
 |u_{\vec{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \right), \\
 |v_{\vec{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Moguće je odabrati da $u_{\vec{k}}$ bude realno, ali zbog prethodnih relacija, onda $v_{\vec{k}}$ mora imati p-wave simetriju. Uzimajući u obzir da je $(c_{\vec{k}}^\dagger)^2 = 0$, jer je riječ o fermionskim kreacionim operatorima, može se pokazati da se stanje može zapisati kao:

$$|\Omega\rangle = \prod_{\vec{k}} |u_{\vec{k}}|^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger\right) |0\rangle, \tag{3.26}$$

pri čemu je $g_{\vec{k}} = \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}}$. Talasna funkcija koja odgovara ovom stanju ima oblik, za N parno:

$$\Psi(\{\vec{r}\}) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} (\frac{N}{2})!} \sum_P \text{sign}(P) \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} g(\vec{r}_{P(2i-1)} - \vec{r}_{P(2i)}). \tag{3.27}$$

Ovo je upravo pfafijanski oblik koji se traži. Neophodno je još pokazati kako $g(\vec{r})$ daje upravo Moore-Read stanje. Ispostavlja se da se to dešava u limitu slabog sparivanja, koje se naknadno identifikuje sa slučajem $\mu > 0$. Kada je $\mu < 0$ za $g(\vec{r})$ se dobija eksponencijalna funkcija tipa $e^{-\frac{r}{r_0}}$ što znači da su parovi čvrsto vezani, tj. da je riječ o jakom sparivanju.

Iz prethodnih jednačina se vidi da u slučaju $\mu > 0$, $|v_{\vec{k}}| \rightarrow 1$ pri malim impulsima, što je upravo slučaj i sa Fermi tečnošću. S druge strane $|u_{\vec{k}}|$ ide u 0 i to kao $u_{\vec{k}} \sim k_x + ik_y$, što kad se vrati iz impulsnog prostora daje odgovarajuću formu Pfafijana:

$$g(\vec{r}) \sim \frac{1}{z}. \tag{3.28}$$

Da bi izračunali efektivnu interakciju koja će nam omogućiti da provjerimo da li postoji Kuperov kanal, tj. da li je moguće sparivanje kada se u teoriju Dirakovog kompozitnog fermiona uvede masa, neophodno je prvo preći na konačno-temperaturni formalizam.

3.4.2 Prelazak na konačno-temperaturni formalizam

Krećemo od sljedećeg Lagranžijana:

$$\mathcal{L}_M = i\bar{\Psi}(\not{\partial} + i\phi)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \mu\bar{\Psi}\gamma_0\Psi. \tag{3.29}$$

Ovo je Lagranžijan za dvokomponentno maseno Dirakovo spinorsko polje Ψ koje interaguje sa emergentnim gauge poljem a_μ . Generišući funkcional moguće je zapisati kao:

$$\int \mathcal{D}\Psi \int \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{i \int dt \int d\vec{x} \mathcal{L}_M[a_\mu]} \quad (3.30)$$

Nakon integracije po fermionskim poljima u aproksimaciji u kojoj se Lagranžijan razvija do kvadratnog člana, generišući funkcional postaje[12]:

$$e^{i \int dt \int d\vec{x} \Pi^{\mu\nu} \frac{a_\mu a_\nu}{2}}. \quad (3.31)$$

Koristimo sljedeću konvenciju za polarizacioni tenzor[9]:

$$\Pi^{\mu\nu} = i \text{tr}[\gamma^\mu G(x, y) \gamma^\nu G(y, x)]. \quad (3.32)$$

$G(x, y)$ je Grinova funkcija u koordinatnoj reprezentaciji.

Posmatramo šta se dešava sa polarizacionim tenzorom nakon Vikove rotacije, analitičkog produženja u imaginarno vrijeme ($t \rightarrow -i\tau$), koja daje efektivni euklidski generišući funkcional u konačno-temperaturnom formalizmu, ali se temperatura postavlja na 0.[13]

$$\mathcal{Z} = e^{- \int d\tau \int d\vec{x} [-\mathcal{L}_M(t \rightarrow -i\tau, \vec{x})]}. \quad (3.33)$$

Euklidski Lagranžijan je $\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}_M(t \rightarrow -i\tau)$. Euklidski Lagranžijan daje drugačije Dirakove spinore i gauge polja i zato će oni biti indeksirani sa "E", kako bi se napravila distinkcija sa početnim Lagranžijanom. Vremenska zavisnost u početnom Lagranžijanu je uključena u vremenski izvod. Nakon analitičkog produženja dobija se:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = i \partial_\tau. \quad (3.34)$$

Iz toga slijedi:

$$\mathcal{L}_E = -i \bar{\Psi}_E (i \gamma^0 \partial_\tau + i \gamma^0 a_0^E) \Psi_E - i \bar{\Psi}_E (\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{a}^E) \Psi_E + m \bar{\Psi}_E \Psi_E - \mu \bar{\Psi}_E \gamma_0 \Psi_E. \quad (3.35)$$

Funkcional je u kvadratnoj aproksimaciji:

$$e^{- \int d\tau \int d\vec{x} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} \frac{a_\mu^E a_\nu^E}{2}}. \quad (3.36)$$

Inverzni Dirakov propagator $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}$ moguće je definisati na različite načine. Ovdje će biti korištena konvencija u kojoj se ne prelazi na euklidske gama-matrice.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = \text{tr}[\gamma^\mu G^E(x, y) \gamma^\nu G^E(y, x)]. \quad (3.37)$$

3.4.3 Veza između $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}$ i $\Pi_{\mu\nu}$

Da bi pronašli vezu između $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}$ i $\Pi_{\mu\nu}$ neophodno je pronaći vezu između fermionskih propagatora. Razlika je u tome što su frekvencije u konačno-temperaturnom formalizmu (na $T = 0$) imaginarne, tj. $\omega \rightarrow i\omega_n$ [13].

Na primjeru $\Pi_l(k)$ ili $\Pi^{00}(k)$ može se pokazati do čega dovodi ova smjena:

$$\Pi^{00}(k) = \frac{\mu}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \times \left(\frac{k \cos \varphi}{k_0 - k \cos \varphi + i\eta} - \frac{k \cos \varphi}{k_0 + k \cos \varphi - i\eta} \right). \quad (3.38)$$

Nakon smjene ($k_0 \rightarrow i\omega_n$) integral postaje:

$$\Pi^{00}(k) = \frac{\mu}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \times \left(\frac{k \cos \varphi}{i\omega_n - k \cos \varphi} - \frac{k \cos \varphi}{i\omega_n + k \cos \varphi} \right). \quad (3.39)$$

Uklanjanju se infinitezimalne η -e u postupku, jer imenilac već ima neinfinitesimalni imaginarni dio.

$$\Pi^{00}(k) = -\frac{\mu}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{k^2 \cos^2 \varphi}{\omega_n^2 + k^2 \cos^2 \varphi}. \quad (3.40)$$

Brojilac se razvija kao: $k^2 \cos^2 \varphi + \omega_n^2 - \omega_n^2$ a proračun elementarnog integrala daje:

$$\Pi^{00}(k) = \frac{\mu}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + k^2}} - 1 \right). \quad (3.41)$$

3.4.4 Pozitivno-energetska komponenta Dirakovog spinora

Neophodno je odrediti struje za interakcioni potencijal, a za to je neophodno naći Dirakov spinor. Iz slobodnog dijela Lagranžijana slijedi sljedeća jednačina kretanja:

$$(\gamma_E^0 \partial_\tau + \vec{\gamma}_E \cdot \vec{\nabla} + m)\Psi = 0. \quad (3.42)$$

Uzima se sljedeća reprezentacija euklidskih gama-matrica:

$$\gamma_E^\mu = (\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2). \quad (3.43)$$

Lako se može provjeriti da ove matrice zadovoljavaju euklidske anti-komutacione relacije:

$$\{\sigma_\mu, \sigma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} I_{2 \times 2}. \quad (3.44)$$

Korišćenjem Ansatz-a $\Psi \sim e^{i\vec{q}\vec{x} + iE\tau}$, dobija se sljedeća jednačina za Ψ_E su impulsnom prostoru:

$$(i\gamma_E^0 E + i\vec{\gamma}_E \cdot \vec{q} + m)\Psi_E = 0. \quad (3.45)$$

Sistem je rješiv ukoliko je determinanta za sistem jednačina jednaka 0:

$$\begin{vmatrix} iE + m & iq_x + q_y \\ iq_x - q_y & -iE + m \end{vmatrix} = 0. \quad (3.46)$$

$(iE + m)(-iE + m) - (q_y + iq_x)(-q_y + iq_x) = E^2 + m^2 + q_x^2 + q_y^2 = 0$. Ova jednačina se može prepisati kao:

$$E^2 = -\epsilon^2; \epsilon = \pm\sqrt{q^2 + m^2}. \quad (3.47)$$

$\epsilon(q)$ je disperziona relacija za Dirakov fermion. Konačno:

$$E = \pm i\epsilon. \quad (3.48)$$

Za potrebe ovog rada neophodno je samo pozitivno-energetsko rješenje, koje je predstavljeno gornjim znakom: $E = i\epsilon$. Sad je moguće riješiti jednačinu:

$$\begin{bmatrix} -\epsilon + m & iq_- \\ iq_+ & \epsilon + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_+^1 \\ \Psi_+^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.49)$$

Pozitivni znak označava pozitivno-energetsko rješenje, brojevi indeksiraju spinorske komponente, a koristi se standardna notacija $q_{\pm} = q_x \pm iq_y$. Lako se dolazi do normalizovanog spinora:

$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{q^2 + (\epsilon - m)^2}} \begin{bmatrix} iq_- \\ \epsilon - m \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

3.4.5 Operator gustine

Operator gustine se definiše kao:

$$J_0(k) = \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \bar{\Psi}_E(\vec{q}_2) \gamma_0 \Psi_E(\vec{q}_1) = \Psi_E^\dagger(\vec{q}_2) \Psi_E(\vec{q}_1). \quad (3.51)$$

Matrični element operatora gustine je:

$$J_0(k)_{q_1, q_2} = \frac{1}{2\epsilon(\epsilon - m)} \begin{bmatrix} -iq_{2+} & \epsilon - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iq_{1-} \\ \epsilon - m \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

q_{\pm} je definisan kao $q_x \pm iq_y = q_F e^{\pm i\theta}$, gdje se koristi nisko-energetska aproksimacija (radimo u blizini Fermi nivoa): $q \sim q_F$. Iz toga je $\epsilon_{q_1} \sim \epsilon_{q_2} \sim \mu = \epsilon_F$.

U datoj aproksimaciji dolazi se do:

$$\frac{1}{2\mu(\mu - m)} (q_F^2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + (\mu - m)^2) = \frac{1}{2\mu} ((\mu + m)e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + (\mu - m)). \quad (3.53)$$

Ispred zagrade će biti izvučen faktor $e^{\frac{i(\theta_2 - \theta_1)}{2}}$.

Konačno, izraz za operator gustine je:

$$J_0(k) = \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} e^{\frac{i(\theta_2 - \theta_1)}{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) + i\frac{m}{\mu} \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \right) a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_1}. \quad (3.54)$$

3.4.6 Transverzalna struja

Biće korištena definicija transverzalne struje iz [14]:

$$J_T(k) = i \sum_{q_1, q_2} \epsilon^{ij} \hat{k}_i \bar{\Psi}_E(q_1) \gamma_j \Psi_E(q_2) a_{q_2}^\dagger a_{q_1}. \quad (3.55)$$

Radi jednostavnosti, biće korištena uprošćena notacija $(J_T(k))_{q_1, q_2} \rightarrow (J_T(k))$. Radi se u sljedećoj reprezentaciji gama-matrice:

$$\gamma^\mu = (\sigma_3, i\sigma_1, i\sigma_2). \quad (3.56)$$

Prvo će biti određena $i\epsilon^{ij}\gamma^0\hat{k}_i\gamma_j$ 2×2 matrica, a nakon toga će na nju biti djelovano sa obje strane Dirakovim spinorima koji su prethodno određeni. γ^0 dolazi od $\bar{\Psi}_E = \Psi_E^\dagger \gamma^0$.

$$i\epsilon^{ij}\gamma^0\hat{k}_i\gamma_j = i\gamma^0\gamma_2k_x - i\gamma^0\gamma^1k_y = \begin{bmatrix} & i \\ i & \end{bmatrix} k_x - \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} k_y = i \begin{bmatrix} & \hat{k}_- \\ \hat{k}_+ & \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Konjugat normalizovanog spinora je:

$$\Psi_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{q^2 + (\epsilon - m)^2}} [-iq_+ \quad \epsilon - m]. \quad (3.58)$$

Transverzalna struja je:

$$J_T(k) \sim \frac{i}{2\epsilon^2 - 2\epsilon m} [-iq_{2+} \quad \epsilon - m] \begin{bmatrix} & \hat{k}_- \\ \hat{k}_+ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iq_{1-} \\ \epsilon - m \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Treba primjetiti da je korišteno da je $\epsilon_{q_1} = \epsilon_{q_2}$. Koristi se aproksimacija u kojoj se radi u blizini Fermijevog impulsa (nisko-energetski limit), pa se moduli q_1 i q_2 aproksimiraju sa q_F , Fermijevim impulsom. Struja se može procjeniti kao:

$$J_T(k) = \frac{1}{2\epsilon} (q_{2+}\hat{k}_- - q_{1-}\hat{k}_+). \quad (3.60)$$

Koristeći istu aproksimaciju, q_{1-} i q_{2+} se u polarnoj formi mogu zapisati kao:

$$q_{2+} = q_{2x} + iq_{2y} = q_2 \cos \theta_2 + iq_2 \sin \theta_2 \sim q_F e^{i\theta_2}; \quad q_{1-} \sim q_F e^{-i\theta_1}. \quad (3.61)$$

Budući da je $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}_2$, \hat{k}_\pm se takođe može predstaviti u polarnoj formi, sa zavisnošću od uglova θ_1 i θ_2 . Prvo će \hat{k}_\pm biti zapisano kao $\frac{k_\pm}{|k_\pm|}$. k_\pm u polarnoj formi, izraženo preko q_2 i q_1 je:

$$k_\pm \sim q_F (e^{\pm i\theta_1} - e^{\pm i\theta_2}). \quad (3.62)$$

Moduli k_+ i k_- su isti i to se može jednostavno demonstrirati.

$$|k_{\pm}| \sim q_F \sqrt{(e^{+i\theta_1} - e^{+i\theta_2})(e^{-i\theta_1} - e^{-i\theta_2})}. \quad (3.63)$$

Algebarskom transformacijom prethodnog izraza dolazi se do:

$$|k_{\pm}| \sim q_F \sqrt{2 - 2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (3.64)$$

Koristeći trigonometrijski identitet za polovinu ugla:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad (3.65)$$

može se odrediti $|k_{\pm}|$:

$$|k_{\pm}| = 2q_F \left| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right|. \quad (3.66)$$

Sada se transversalna struje može zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} J_T(k) &\sim \frac{q_F^2}{2|k_{\pm}| \sqrt{q_F^2 + m^2}} \{ e^{i\theta_2} (e^{-i\theta_1} - e^{-i\theta_2}) - e^{-i\theta_1} (e^{+i\theta_1} - e^{+i\theta_2}) \} \\ &= - \frac{q_F^2}{|k_{\pm}| \sqrt{q_F^2 + m^2}} \{ 1 - e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \} \\ &= - \frac{q_F^2}{|k_{\pm}| \sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \{ e^{-i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} - e^{i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \} \\ &= \frac{2i q_F^2}{|k_{\pm}| \sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Zamjenom $|k_{\pm}|$ dobija se:

$$J_T(k) \sim i \frac{q_F}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \frac{\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{\left| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right|}. \quad (3.68)$$

Može se pokazati kako je korištena definicija transversalne struje hermitska.

$$J_T^\dagger(k) = - \sum_{q_1, q_2} i \frac{q_F}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{-i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \frac{\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{\left| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right|} a_{q_1}^\dagger a_{q_2} \quad (3.69)$$

Da bi ovo bilo tačno, mora biti ispunjena relacija $J_T^\dagger(k) = J_T(-k)$. Transformacija $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ odgovara zamjeni θ_2 sa θ_1 , i $q_1 \leftrightarrow q_2$ kod kreacionih i anihilacionih operatora.

$$J_T(-k) = \sum_{q_1, q_2} i \frac{q_F}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{i \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \frac{\sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|} a_{q_1}^\dagger a_{q_2}. \quad (3.70)$$

Korišćenjem činjenice da je sinus neparna funkcija to poništava "-" u prethodnoj relaciji, i na ovaj način je pokazano da je definicija struje hermitska.

3.4.7 Interakcioni potencijal

Iz interakcionog dijela efektivnog Lagranžijana može da se pročita izgled interakcionog potencijala:

$$V_{int} = -\frac{1}{2}\mathcal{D}^{\mu\nu}(k)J_{\mu}^{\dagger}(k)J_{\nu}(k), \quad \mu, \nu = 0, T. \quad (3.71)$$

gdje je T indeks za transverzalnu komponentu gustine struje.

Tražimo Kuperov kanal tako da pravimo smjenu $k \rightarrow -k$. Budući da je $\vec{k} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$, a $-\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}_2$ za određivanje $J_{0,T}(-k)$ može se napraviti smjena $q_{1,2} \rightarrow -q_{1,2}$. Iz ovoga slijedi da je $\theta_q \rightarrow \theta_q + \pi$, jer je $e^{i\pi} = -1$.

$J_{0,T}(-k)$ su:

$$J_0(-k) = \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} e^{\frac{i(\theta_2 - \theta_1)}{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) + i\frac{m}{\mu} \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \right) a_{-\vec{q}_2}^{\dagger} a_{-\vec{q}_1}, \quad (3.72)$$

i:

$$J_T(-k) = -i \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \frac{q_F}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{i\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \frac{\sin\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{|\sin\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}|} a_{-\vec{q}_2}^{\dagger} a_{-\vec{q}_1}. \quad (3.73)$$

Ranije je određeno da $\mathcal{D}^{-1} = \Pi$. Neophodno je napraviti jedan dodatak: neophodno je dodati Kulonovu interakciju transverzalnoj komponenti polarizacionog tenzora. U prirodnom sistemu jedinica to je $\frac{\alpha k}{4\pi^2}$ [14], gdje $\alpha = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_r}$. Zbog jednostavnosti, cijela transverzalno-transverzalna komponenta polarizacionog tenzora biće zapisana kao:

$$\tilde{\Pi}^{TT} = \Pi^{TT} + \frac{\alpha k}{4\pi^2}. \quad (3.74)$$

Inverz od \mathcal{D}^{-1} je:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\Pi^{00}\tilde{\Pi}^{TT} - (\Pi^{0T})^2} \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}^{TT} & -\Pi^{T0} \\ -\Pi^{0T} & \Pi^{00} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

3.4.8 Statički limit

U ovom odjeljku će biti pokazano da u statičkom limitu ($\omega_n \rightarrow 0$) ne može doći do pojave privlačnog potencijala, tj. da ne dolazi do stabilizacije sparenog stanja u Kuperovom kanalu. U statičkom limitu dolazi do uprošćenja komponenti polarizacionog tenzora:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{00} &\rightarrow -\frac{\sqrt{q_F^2 + m^2}}{2\pi} \\
 \tilde{\Pi}^{TT} &\rightarrow \frac{q_F^2}{2\pi\sqrt{q_F^2 + m^2}} - \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} \frac{\sqrt{q_F^2 + m^2}}{2\pi} + \frac{\alpha k}{4\pi^2} = \frac{\alpha k}{4\pi^2} \\
 \Pi^{0T} &\rightarrow -\frac{km}{2\pi\sqrt{q_F^2 + m^2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} \frac{\sqrt{q_F^2 + m^2}}{2\pi} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Može se vidjeti da je $\det \mathcal{D}^{-1} \leq 0$, a kasnije će biti pokazano da je to generalniji iskaz, tj. da važi i van statičkog limita koji se razmatra u ovom odjeljku.

$$\det \mathcal{D}^{-1} = -\frac{k}{16\pi^2} \sqrt{q_F^2 + m^2}. \tag{3.77}$$

Interakcioni potencijal će biti podijeljen na tri člana: longitudinalni, transverzalni i onaj koji dolazi iz razmatranja Π^{0T} do prvog reda po k , tj. Chern-Simons člana.

Ukupni interakcioni potencijal moguće je zapisati kao:

$$V_{int} = V_{int}^l + V_{int}^t + V_{int}^{0T}. \tag{3.78}$$

Prethodno su određene struje i konjugati za operatore gustine i struje. Interakcioni potencijal u RPA aproksimaciji uključuje komponente polarizacionog tenzora i proizvode gustina-gustina, gustina-struja i struja-struja. Prvo će biti zapisani proizvodi struja, a nakon toga će biti razmatrani pojedinačni dijelovi interakcionog potencijala. Interakcioni potencijal je moguće zapisati u BCS kanalu, a sume po talasnim vektorima neće biti zapisane zbog jednostavnosti. Ispred zagrada izlazi faktor $e^{il(\theta_2 - \theta_1)}$ gdje je $l = 1$ kvantni broj orbitalnog angularnog momenta: razmatra se sparivanje u p-wave kanalu.

$$\begin{aligned}
 J^0(-k)J^0(k) &= e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \left[\cos^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) + i \frac{m}{\mu} \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{m^2}{\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right], \\
 J^T(-k)J^T(k) &= -e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2}, \\
 J^0(-k)J^T(k) &= J^T(-k)J^0(k) = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \left[\frac{-iq_F^2}{\mu k} \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{2mq_F^2}{\mu^2 k} \sin^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Chern-Simons član nestaje u statičkom limitu, tako da preostaju longitudinalni i transverzalni dio. U statičkom limitu opšti izraz $V_{int} = -\mathcal{D}^{\mu\nu}(k)J_\mu^\dagger(k)J_\nu(k)$ se pojednostavljuje:

$$V_{int} = -\frac{1}{\Pi^{00}\tilde{\Pi}^{TT}} \left[\tilde{\Pi}^{TT} J^0(-k)J^0(k) + \Pi^{00} J^T(-k)J^T(k) \right], \tag{3.80}$$

gdje je prvi član V_{int}^l , a drugi V_{int}^t u notaciji koja je uvedena. Kada se eksplicitno zapišu operatori gustine i struje, dijelovi interakcionog potencijala su:

$$\begin{aligned} V_{int}^l &= -\frac{1}{\Pi^{00}} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \left[\cos^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) + i \frac{m}{\mu} \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{m^2}{\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right] \\ V_{int}^t &= \frac{1}{\tilde{\Pi}^{TT}} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

k , koji ulazi u $\tilde{\Pi}^{TT}$, može se zapisati preko uglova $2q_F |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})|$. Budući da radimo u hidrodinamičkom limitu ($k \ll |\vec{q}|$), očekuje se forward-scattering, tj. da razlika između uglova $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ bude mala. Pošto je $\tilde{\Pi}^{TT}$ pozitivno, a Π^{00} negativno, može se zaključiti da je interakcioni potencijal striktno pozitivan. U longitudinalnom dijelu dominira kosinusni član zbog male razlike u uglovima. Stoga je:

$$\begin{aligned} V_{int}^l &\rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \cos^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \\ V_{int}^t &\rightarrow \frac{4\pi}{q_F |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})|} \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

U bezmasenom limitu dobija se rezultat za transverzalni interakcioni potencijal koji su dobili Wang i Chakravarty [15], koji su uradili sličnu RPA analizu. Ovaj član dominira nad longitudinalnim zbog prirode Kulonove interakcije, koja divergira za $k \rightarrow 0$, ukoliko se ne uzme u obzir ekraniranje.

Pozitivni interakcioni potencijal ne omogućava kreaciju Kuperovog kanala u statičkom limitu ($\omega_n \rightarrow 0$). U sljedećem odjeljku biće razmatran interakcioni potencijal pri konačnim frekvencijama.

3.4.9 Nestatički slučaj

U ovom odjeljku biće analiziran limit $\alpha_F k \ll \omega_n$, gdje je α_F u prethodnom dijelu teksta definisan kao faktor reskaliranja impulsa. Prvo će biti zapisane komponente polarizacionog tenzora koje se dobijaju nakon što se uradi smjena $k_0 \rightarrow i\omega_n$ u integralima.

$$\begin{aligned} \Pi^{00}(k) &= \frac{\mu}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \tilde{k}^2}} - 1 \right); \\ \Pi^{TT}(k) &= \frac{1}{2\pi} \frac{q_F^2}{\mu} + \frac{\omega_n^2 + \tilde{k}^2}{k^2} \Pi^{00}(k); \\ \Pi^{0T}(k) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{m}{\mu} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{\mu} \Pi^{00}(k) \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Još je neophodno dodati Kulonovu interakciju transverzalnoj komponenti polarizacionog tenzora. Sa \tilde{k} označen je reskalirani talasni vektor $\tilde{k} = \frac{q_F}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} k$.

Kao što se može vidjeti, sa povećanjem mase reskalirani talasni vektor se smanjuje.

Prvo, treba primjetiti da je $\Pi^{TT}(k)$ striktno pozitivno. Koristeći definiciju za \tilde{k} , $\Pi^{TT}(k)$ se može prepisati kao:

$$\frac{q_F^2 \omega_n^2}{2\pi \mu \tilde{k}^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{k}}{\omega_n}\right)^2} - 1 \right), \quad (3.84)$$

što je očigledno pozitivna veličina.

Opšti izraz za interakcioni potencijal zapisan preko komponenti polarizacionog tenzora i operatora gustine i struje je:

$$V_{int} = -\frac{1}{\Pi^{00} \tilde{\Pi}^{TT} - (\Pi^{0T})^2} \left[\tilde{\Pi}^{TT} J^0(-k) J^0(k) + \Pi^{00} J^T(-k) J^T(k) - 2\Pi^{0T} J^0(-k) J^T(k) \right]. \quad (3.85)$$

Pokazano je da je $\tilde{\Pi}^{TT}$ pozitivno, a lako se može vidjeti da je Π^{00} negativno. Slijedi da je član $-\frac{1}{\det \mathcal{D}^{-1}}$ pozitivan.

U ovom limitu komponente polarizacionog tenzora postaju:

$$\begin{aligned} \Pi^{00} &= \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{k}}{\omega_n}\right)^2}} - 1 \right) \sim -\frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\tilde{k}}{\omega_n} \right)^2; \\ \tilde{\Pi}^{TT} &\sim \frac{\mu}{4\pi} + \frac{\alpha k}{4\pi^2}; \\ \Pi^{0T} &\sim -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{m}{\mu} \right) k. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Dobija se da je interakcioni potencijal:

$$\begin{aligned} V_{int} &= i \frac{4\pi}{m} e^{i\theta_2 - i\theta_1} \frac{\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{|\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}|^2} \times \left[\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + i \frac{m}{\mu} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right] \\ &+ \left(\frac{4\pi\mu}{m} \right)^2 \frac{\frac{q_F^2}{4\pi\mu} + \frac{\alpha}{4\pi^2} 2q_F |\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}|}{2q_F^2 |\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}|^2} e^{i\theta_2 - i\theta_1} \left[\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + i \frac{m}{\mu} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Iako se ni ovdje ne vidi razlog za postojanje Kuperove nestabilnosti, postoje naznake parnih korelacije u prvom redu, te bi prelaskom na drugačiju kvazičestičnu reprezentaciju eventualne korelacije mogle biti bolje prikazane. To je i analizirano u [16], gdje je pronađeno sparivanje. Za malu masu, tj. kad je mješanje između Landauvljevih nivoa slabo, javljaju se nestabilnosti pfafijanskog i anti-pfafijanskog tipa u zavisnosti od znaka mase. To odgovara i numeričkim eksperimentima na drugom Landauvljevom nivou ($\nu = \frac{5}{2}$). Na malim masama je PH Pfafijan kritičan, što se takođe vidi iz numeričkih eksperimenata. Za veliku masu pronađene su nestabilnosti PH-pfafijanskog tipa ($l = 1$), koji je simetričan na PH transformaciju.

4 Zaključak

U ovom radu istraživana je Sonova teorija polupopunjenog Landauvljevog nivoa u kojoj je kompozitni fermion Dirakova čestica. Korištena je varijanta Sonove teorije u kojoj Dirakov fermion ima masu, što treba da simulira miješanje između Landauvljevih nivoa. Istraživano je da li u okvirima RPA aproksimacije postoji nestabilnost za formiranje Kuperovog para. Slična analiza ranije je urađena za bezmaseni slučaj[15] i otkriveno je da se nestabilnost ne javlja u statičkom slučaju. Dodavanje mase nije promjenilo zaključke u statičkom slučaju, ali su u okviru drugačije kvazičestične reprezentacije[16] pronađene nestabilnosti.

A Polarizacioni tenzor

Definicija polarizacionog tenzora u impulsnoj reprezentaciji je[8]:

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dq_0 d^2\vec{q} \operatorname{tr}[\gamma^\mu G^0(q)\gamma^\nu G^0(q+k)]. \quad (\text{A.1})$$

Budući da postoje dva člana u izrazu za propagator, polarizacioni tenzor će se sastojati od 4 člana. Međutim, proizvod drugih članova sadrži polove koji su na istoj strani realne linije u kompleksnoj ravni, i izborom konture koja leži u poluravni bez polova taj integral se anulira, te stoga ostaju tri nenulta člana.

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dq_0 d^2\vec{q} \left(\frac{\operatorname{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(-)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(-)}]}{(q_0 - \epsilon_{\vec{q}} + i\eta[\theta(\epsilon_{\vec{q}} - \mu) - \theta(\mu - \epsilon_{\vec{q}})])(q_0 + k_0 - \epsilon_{\vec{q}+\vec{k}} + i\eta[\theta(\epsilon_{\vec{q}+\vec{k}} - \mu) - \theta(\mu - \epsilon_{\vec{q}+\vec{k}})])} \right) \\ & - \frac{i}{(2\pi)^3} \int dq_0 d^2\vec{q} \left(\frac{\operatorname{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(+)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(-)}]}{(q_0 + \epsilon_{\vec{q}} - i\eta)(q_0 + k_0 - \epsilon_{\vec{q}+\vec{k}} + i\eta[\theta(\epsilon_{\vec{q}+\vec{k}} - \mu) - \theta(\mu - \epsilon_{\vec{q}+\vec{k}})])} \right) \\ & - \frac{i}{(2\pi)^3} \int dq_0 d^2\vec{q} \left(\frac{\operatorname{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(-)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(+)}]}{(q_0 - \epsilon_{\vec{q}} + i\eta[\theta(\epsilon_{\vec{q}} - \mu) - \theta(\mu - \epsilon_{\vec{q}})])(q_0 + k_0 + \epsilon_{\vec{q}+\vec{k}} - i\eta)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

gdje je $\epsilon_{\vec{q}}$ skraćeni zapis disperzione relacije $\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}$.

Tragovi koji se pojavljuju u brojiocima računaju se u limesu $|\vec{k}| \ll \mu$. Gama matrice u dvodimenzionalnom slučaju poštuju sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\gamma^\mu) &= 0 \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= -2i\epsilon^{\mu\nu\lambda} g_{\lambda\sigma} \gamma^\sigma \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \operatorname{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 2g^{\mu\nu} \\ \operatorname{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 2(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Tragovi se aproksimiraju kao: $\operatorname{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(\pm)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(\pm)}] \sim \operatorname{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(\pm)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_q^{(\pm)}]$.

Prvi trag je moguće zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 I &= \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(-)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_q^{(-)}] = \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)} \gamma^\nu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)}] \\
 &+ \frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)}] + \frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)} \gamma^\nu] + \left(\frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}}\right)^2 \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu].
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Članovi koji su linearni po masi nestaju, jer sadrže izraze oblika:

$$\text{tr}[\gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma^\rho\}] = 2g^{\nu\rho} \text{tr}[\gamma^\mu] = 0. \tag{A.5}$$

Korišćenjem zapisanih identiteta dobija se izraz za prvi trag:

$$I = \left(g^{\mu 0} + \frac{\vec{q}^\mu}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}\right) \left(g^{\nu 0} + \frac{\vec{q}^\nu}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}\right) \tag{A.6}$$

Posljedica uvođenja mase u teoriju, ukoliko uporedimo ovaj izraz sa bezmasenim slučajem, je da se $|\vec{q}|$ transformiše u $\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}$.

Drugi trag je:

$$\begin{aligned}
 II &= \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(+)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_q^{(-)}] = \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Lambda_q^{(+)} \gamma^\nu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)}] \\
 &- \frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)}] + \frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Lambda_q^{(+)} \gamma^\nu] - \left(\frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}}\right)^2 \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu].
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Zbir prvog i posljednjeg člana se uvođenjem mase transformiše na isti način kao u slučaju traga I , dok članovi linearni po masi daju:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \Lambda_q^{(-)}] + \frac{m}{2\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Lambda_q^{(+)} \gamma^\nu] \\
 &= \frac{m}{4\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^\mu [\gamma^0, \gamma^\nu]] + \frac{m}{4\epsilon_{\vec{q}}^2} q^i \text{tr}[\gamma^\mu \{\gamma^i, \gamma^\nu\}] \\
 &= \frac{im}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \epsilon^{0\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Konačni rezultat je:

$$II = g^{\mu 0} g^{\nu 0} - g^{\mu\nu} - \frac{\vec{q}^\mu \vec{q}^\nu}{|\vec{q}|^2 + m^2} + \frac{im}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \epsilon^{0\mu\nu} \tag{A.9}$$

Treći trag je isti kao drugi, sa razlikom da je znak posljednjeg člana suprotan:

$$III = g^{\mu 0} g^{\nu 0} - g^{\mu\nu} - \frac{\vec{q}^\mu \vec{q}^\nu}{|\vec{q}|^2 + m^2} - \frac{im}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \epsilon^{0\mu\nu} \tag{A.10}$$

Na ovaj način su dobijeni svi izrazi za brojiće, i može se preći na izračunavanje integrala. Za početak je zgodno uraditi integraciju po frekvencijama, korištenjem proste konturne integracije, pri kojoj je kontura zatvorena u jednoj poluravnini, tako da jedan pol leži unutar konture. Integrali su tipa:

$$\int \frac{dq_0}{(q_0 - q_0^1)(q_0 - q_0^2)}, \quad (\text{A.11})$$

i daju doprinos $\frac{2\pi i}{q_0^1 - q_0^2}$, ako je npr. p_0^1 pol koji leži unutar konture u gornjoj poluravni, a integrali se u matematički pozitivnom smjeru.

Zamjenom tragova i integracijom po frekvencijama, polarizacioni tenzor postaje:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \left(g^{\mu 0} + \frac{\vec{q}^\mu}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right) \left(g^{\nu 0} + \frac{\vec{q}^\nu}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right) \\ &\times \left(\frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} + i\eta} - \frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - i\eta} \right) \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \left(-g^{\mu 0}g^{\nu 0} + g^{\mu\nu} + \frac{\vec{q}^\mu\vec{q}^\nu}{|\vec{q}|^2 + m^2} - \frac{im}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}\epsilon^{0\mu\nu} \right) \frac{\theta(\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \mu)}{-k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} + \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - i\eta} \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \left(-g^{\mu 0}g^{\nu 0} + g^{\mu\nu} + \frac{\vec{q}^\mu\vec{q}^\nu}{|\vec{q}|^2 + m^2} + \frac{im}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}\epsilon^{0\mu\nu} \right) \frac{\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} + \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - i\eta}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Integrali će biti označeni pomoću \pm znakova, koji govore o projektorima u tragovima, koji su dio pojedinačnih članova. Znakovi $(--)$, $(+-)$ i $(-+)$ će označavati integrale, redosljedom datim u prethodnom izrazu.

$$\Pi^{00}(k)$$

U izrazu za (00) komponentu polarizacionog tenzora posljednja dva integrala, $(+-)$ i $(-+)$, su 0 zbog traga, a prvi u brojiocu ima faktor 1. Dakle, neophodno je izračunati sljedeći integral:

$$\Pi^{00} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \left(\frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} + i\eta} - \frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - i\eta} \right). \quad (\text{A.13})$$

U drugom članu razlike može se napraviti smjena $\vec{q}' = -\vec{q} - \vec{k}$, a potom \vec{q}' preimenovati u \vec{q} . Tako, Π^{00} postaje:

$$\begin{aligned} \Pi^{00} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}) \theta(\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \mu) \\ &\times \left(\frac{1}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} + i\eta} - \frac{1}{k_0 + \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - i\eta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

U aproksimaciji malog $|\vec{k}|$, $|\vec{q} + \vec{k}|^2$ postaje:

$$|\vec{q} + \vec{k}|^2 = q^2 + k^2 + 2qk \cos \varphi \sim q^2 + 2qk \cos \varphi. \quad (\text{A.15})$$

U nastavku će biti korištene polarne koordinate, pa će $|\vec{q}|$ biti zapisivan kao q . Ovo ne treba miješati sa notacijom za vektor $q = (q_0, \vec{q})$.

$\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2}$ se može razviti u Tejlorov red:

$$\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} = \sqrt{q^2 + m^2} \left(1 + \frac{2qk \cos \varphi}{q^2 + m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{q^2 + m^2} \left(1 + \frac{qk \cos \varphi}{q^2 + m^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

Step-funkciju $\theta(\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \mu)$ je takođe moguće razviti pomoću Tejlorovog razvoja:

$$\theta\left(\sqrt{q^2 + m^2} - \mu + \frac{qk \cos \varphi}{\sqrt{q^2 + m^2}}\right) \sim \theta(\sqrt{q^2 + m^2} - \mu) + \delta(\sqrt{q^2 + m^2} - \mu) \frac{qk \cos \varphi}{\sqrt{q^2 + m^2}} \quad (\text{A.17})$$

Delta funkcija dolazi zbog toga što je delta funkcija izvod step funkcije. Prvi član u razvoju se množi sa $\theta(\mu - \sqrt{q^2 + m^2})$, limiti integracije postaju isti, pa je doprinos tog integrala ukupnom izrazu 0. Ista aproksimacija može da se koristi sa drugim članom $\Pi^{00}(k)$. Ono što preostaje je:

$$\begin{aligned} \Pi^{00}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dq \theta(\mu - \sqrt{q^2 + m^2}) \delta(\sqrt{q^2 + m^2} - \mu) \frac{q^2 k \cos \varphi}{\sqrt{q^2 + m^2}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{k_0 - \frac{qk \cos \varphi}{\sqrt{q^2 + m^2}} + i\eta} - \frac{1}{k_0 + \frac{qk \cos \varphi}{\sqrt{q^2 + m^2}} - i\eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Budući da je $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, gdje su x_i nule od $f(x)$, slijedi da je:

$$\delta(\sqrt{q^2 + m^2} - \mu) = \frac{\sqrt{q_F^2 + m^2}}{q_F} \delta(q - q_F), \quad (\text{A.19})$$

pri čemu je $\mu = \sqrt{q_F^2 + m^2}$, a q_F je Fermijev impuls. Step funkcija nakon integracije daje $\theta(0) = \frac{1}{2}$. Može se, takođe, primjetiti da, budući da je integrand parna funkcija u simetričnim granicama integracije po φ , integral može prikazati sa faktorom 2, a granice promjeniti od 0 do π .

$$\Pi^{00}(k) = \frac{q_F k}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} d\varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{k_0 - \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} + i\eta} - \frac{1}{k_0 + \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} - i\eta} \right) \quad (\text{A.20})$$

Identitet $\frac{1}{\omega \pm i\eta} = \mathcal{P}\frac{1}{\omega} \mp i\pi\delta(\omega)$ ¹ se koristi za razdvajanje izraza na realni i imaginarni dio.

$$\text{Re}\Pi^{00}(k) = \frac{q_F k}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{\frac{2q_F k \cos^2 \varphi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}}}{k_0^2 - \frac{q_F^2 k^2 \cos^2 \varphi}{q_F^2 + m^2}} \right) \quad (\text{A.21})$$

Ugaona integracija daje:

$$\text{Re}\Pi^{00}(k) = \frac{\sqrt{q_F^2 + m^2}}{2\pi} \left(-1 + \sqrt{\frac{k_0^2}{k_0^2 - \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2}} \theta\left(k_0^2 - \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2\right) \right). \quad (\text{A.22})$$

Imaginarni dio je, nakon integracije:

$$\text{Im}\Pi^{00}(k) = -\frac{\sqrt{q_F^2 + m^2}}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0^2}{\frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2 - k_0^2}} \theta\left(\frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2 - k_0^2\right) \quad (\text{A.23})$$

U poređenju sa bezmasenim slučajem, može se zaključiti da uvođenje mase dovodi do reskaliranja impulsa k , $k \rightarrow \frac{q_F}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} k$.

Ostale komponente polarizacionog tenzora

Opet se bira koordinatni sistem tako da je $\vec{k} = (|\vec{k}|, 0)$. Ovo automatski dovodi do toga da je u hidrodinamičkoj aproksimaciji $\Pi^{0y}(k) = 0$. Nastavimo analizu sa $\Pi^{0x}(k)$. Može se primjetiti da preživljava samo $(--)$ član, i to sa faktorom $\frac{q_x}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}$.

$$\Pi^{0x} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \frac{q_x}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \left(\frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} + i\eta} - \frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2} - i\eta} \right). \quad (\text{A.24})$$

Može se napraviti ista smjena kao u prethodnom članu $\vec{q} \rightarrow -\vec{q} - \vec{k}$, što omogućava step funkciji da izađe ispred zagrade. Međutim, u ovom slučaju, u poređenju sa Π^{00} , faktor ispred takođe mijenja oblik prilikom smjene. Faktor postaje:

$$\frac{q_x}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \rightarrow \frac{-q_x - k}{\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2}}, \quad (\text{A.25})$$

¹Sokhotski-Plemelj teorema.

uzimajući u obzir činjenicu da postoji samo x komponenta vektora k . Ovaj faktor se može aproksimirati kao $\frac{-q_x}{\sqrt{|\vec{q}|^2+m^2}}$, pa se dolazi do izraza:

$$\Pi^{0x} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \frac{q_x}{\sqrt{|\vec{q}|^2+m^2}} \left(\frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2+m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2}-\mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2+m^2} - \sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2} + i\eta} + \frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2+m^2}-\mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2+m^2} - i\eta} \right). \quad (\text{A.26})$$

q_x je $q \cos \varphi$ u polarnim koordinatama, a aproksimaciona procedura je ista kao kod $\Pi^{00}(k)$.

$$\Pi^{0x}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{kq_F^2}{\sqrt{q_F^2+m^2}} \int_0^\pi d\varphi \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{k_0 - \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2+m^2}} + i\eta} + \frac{1}{k_0 + \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2+m^2}} - i\eta} \right). \quad (\text{A.27})$$

Rješenje ovog integrala je:

$$\begin{aligned} \Pi^{0x} &= \frac{k_0}{k} \frac{\sqrt{q_F^2+m^2}}{2\pi} \left(-1 + \sqrt{\frac{k_0^2}{k_0^2 - \frac{q_F^2}{q_F^2+m^2} k^2}} \theta(k_0^2 - \frac{q_F^2}{q_F^2+m^2} k^2) \right. \\ &\quad \left. - i \sqrt{\frac{k_0^2}{\frac{q_F^2}{q_F^2+m^2} k^2 - k_0^2}} \theta(\frac{q_F^2}{q_F^2+m^2} k^2 - k_0^2) \right) = \frac{k_0}{k} \Pi^{00}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Π^{xx} ima sve komponente: $(--)$, $(+-)$ i $(-+)$. $\Pi_{(--)}^{xx}$ se računa na sličan način kao prethodne dvije komponente. Faktor koji se sad pojavljuje je $\frac{q_x^2}{\sqrt{q^2+m^2}}$, a nakon smjene i aproksimacije može da dođe ispred zagrade.

$$\Pi_{(--)}^{xx} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{q} \frac{q_x^2}{|\vec{q}|^2+m^2} \left(\frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}|^2+m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2}-\mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}|^2+m^2} - \sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2} + i\eta} - \frac{\theta(\mu - \sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2})\theta(\sqrt{|\vec{q}|^2+m^2}-\mu)}{k_0 + \sqrt{|\vec{q}+\vec{k}|^2+m^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2+m^2} - i\eta} \right), \quad (\text{A.29})$$

što se nakon integracije po q pretvara u:

$$\Pi_{(--)}^{xx}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{kq_F^3}{q_F^2+m^2} \int_0^\pi d\varphi \cos^3 \varphi \left(\frac{1}{k_0 - \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2+m^2}} + i\eta} - \frac{1}{k_0 + \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2+m^2}} - i\eta} \right). \quad (\text{A.30})$$

Realni dio ovog izraza je:

$$\text{Re}\Pi_{(--)}^{xx}(k) = -\frac{1}{4\pi} \frac{q_F^2}{\sqrt{q_F^2+m^2}} + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \text{Re}\Pi^{00}(k), \quad (\text{A.31})$$

a imaginarni:

$$\text{Im}\Pi_{(- -)}^{xx}(k) = \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \text{Im}\Pi^{00}(k). \quad (\text{A.32})$$

Sada nastavljamo sa računanjem vrijednosti $(+-)$ i $(-+)$ članova. Odmah je jasno da su ovi članovi divergentni i da će biti neophodno primjeniti neku vrstu regularizacione procedure.

Pauli-Villars regularizacija je pogodna, jer održava simetrije teorije. Bozonsko ghost-polje sa velikom masom (u odnosu na druge veličine) se dodaje u Lagranžijan, i zbog statistike koju posjeduje dolazi sa predznakom minus. Ono manifestno rješava problem divergencije na visokim impulsima (ultraljubičaste divergencije), jer daje multi doprinos za male impulse, a za velike impulse se potire sa početnim doprinosom.

Npr. originalni račun za $\Pi^{00}(k)$ je davao:

$$\Pi^{00}(k) = \frac{q_F k}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{k_0 - \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} + i\eta} - \frac{1}{k_0 + \frac{q_F k \cos \varphi}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} - i\eta} \right) \quad (\text{A.33})$$

U PV regularizaciji, velika masa dovodi do toga da se drugi član u imeniocu anulira, jer je reskalirani impuls nula, i nema doprinosa od bozonskog polja 00 komponenti polarizacionog tenzora. Ovo prosto govori o tome da u ovoj komponenti ne postoji divergencija pri visokim impulsima. Slični zaključci se mogu primjeniti i na Π^{0x} , koji je jednak $\frac{k_0}{k} \Pi^{00}(k)$.

Pređimo na određivanje $(+-)$ i $(-+)$ članova. Za početak se uvodi cut-off frekvencija Λ . Ako se naprave aproksimacije $k_0 \rightarrow 0$ i $k \rightarrow 0$ ova dva integrala su ista, i preostaje:

$$\Pi_{(+ -)}^{xx} + \Pi_{(- +)}^{xx} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\Lambda dq q \left(-1 + \frac{q^2 \cos^2 \varphi}{q^2 + m^2} \right) \frac{\theta(q - q_F)}{2\sqrt{q^2 + m^2}}. \quad (\text{A.34})$$

Ovo je elementarni integral koji ima vrijednost:

$$\Pi_{(+ -)}^{xx} + \Pi_{(- +)}^{xx} = -\frac{1}{4\pi} \left(\sqrt{\Lambda^2 + m^2} - \sqrt{q_F^2 + m^2} - \frac{m^2}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} \right). \quad (\text{A.35})$$

Kombinujući ovo sa $(--)$ dijelom, dobija se da je $\Pi^{xx}(k)$:

$$\Pi^{xx}(k) = -\frac{1}{4\pi} \left(\sqrt{\Lambda^2 + m^2} - \sqrt{q_F^2 + m^2} - \frac{m^2}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{q_F^2}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \Pi^{00}(k). \quad (\text{A.36})$$

Može se primjetiti da treći i četvrti član daju tačno drugi član sa negativnim predznakom, tako da je:

$$\Pi^{xx}(k) = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\Lambda^2 + m^2} + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \Pi^{00}(k) - \frac{m^2}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}}. \quad (\text{A.37})$$

Ukoliko se na ovo doda bozonsko ghost polje sa velikom masom, dobija se:

$$\begin{aligned} \Pi_{PV}^{xx}(k) = & -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\Lambda^2 + m^2}\Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \Pi^{00}(k) + \frac{1}{4\pi}\sqrt{\Lambda^2 + M^2}\Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \Pi^{00}(k)\Big|_{boson} \\ & - \frac{m^2}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} + \frac{M^2}{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Četvrti član je nula iz istog razloga kao i za (00) komponentu tenzora. Neophodno je prvo uzeti limit velikih impulsa, a zatim limit velike mase. To odmah čini da su posljednja dva člana 0. Prvi i treći član se potiru u limitu visokih impulsa, jer se svode na iste članove suprotnih predznaka. Dakle, preostaje samo drugi član:

$$\Pi_{PV}^{xx}(k) = \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \Pi^{00}(k). \quad (\text{A.39})$$

Konačno, $\Pi^{xx}(k)$ ima vrijednost:

$$\Pi^{xx}(k) = \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \Pi^{00}(k). \quad (\text{A.40})$$

$\Pi_{-}^{yy}(k)$ je sličan komponenti $\Pi_{-}^{xx}(k)$, izuzev činjenice da se sada ispred zgrade pojavljuje faktor $\frac{q^2 \sin^2 \varphi}{q^2 + m^2}$. $\sin^2 \varphi$ se može zapisati kao $1 - \cos^2 \varphi$, tako da se dobija jedan integral identičan sa Π^{00} , izuzev činjenice da se sada množi faktorom $\frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2}$, minus integral isti kao $\Pi_{(-)}^{xx}$. Korišćenjem iste aproksimacije, Π_{+}^{yy} i Π_{-}^{yy} su isti kao Π_{+}^{xx} i Π_{-}^{xx} , sa jedinom razlikom u tome da je sada $\sin^2 \varphi$ na mjestu $\cos^2 \varphi$, ali ugaona integracija sada uklanja ovu razliku.

Ako se uvede cut-off, $\Pi^{yy}(k)$ je:

$$\Pi^{yy}(k) = \frac{k^2 - k_0^2}{k^2} \Pi^{00}(k) + \frac{1}{2\pi} \frac{q_F^2}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Lambda^2 + m^2}\Big|_{\Lambda \rightarrow \infty}. \quad (\text{A.41})$$

Regularizovana yy -komponenta tenzora:

$$\begin{aligned} \Pi_{PV}^{yy}(k) = & \frac{k^2 - k_0^2}{k^2} \Pi^{00}(k) + \frac{1}{2\pi} \frac{q_F^2}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Lambda^2 + m^2}\Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} \\ & - \frac{k^2 - k_0^2}{k^2} \Pi^{00}(k)\Big|_{boson} - \frac{1}{2\pi} \frac{q_F^2}{\sqrt{q_F^2 + M^2}} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Lambda^2 + M^2}\Big|_{\Lambda \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Prvo se treći i posljednji član potiru u limitu visokih impulsa, a zatim se anuliraju četvrti i peti član u limitu visoke mase ghost polja. Stoga je regularizovano $\Pi^{yy}(k)$:

$$\Pi_{PV}^{yy}(k) = \frac{k^2 - k_0^2}{k^2} \Pi^{00}(k) + \frac{1}{2\pi} \frac{q_F^2}{\sqrt{q_F^2 + m^2}}. \quad (\text{A.43})$$

Konačno, može se zaključiti da je $\Pi^{xy} = 0$, pri čemu jedini doprinos dolazi od $\epsilon^{0\mu\nu}$ članova, koji dolaze sa suprotnim znakovima i u korištenoj aproksimaciji se potiru.

Chern-Simons član

Svi prethodni proračuni su čuvali samo prvi član u razvoju traga. Zaključeno je da je u ovoj aproksimaciji $\Pi^{0y}(k) = 0$. Može se postaviti pitanje koji je sljedeći prvi nenulti član. Očekuje se da bude linearan po k i to je član koji je značajan za kvantnu Holovu provodnost.

Vrativši se na tragove, pogledajmo koja je razlika ukoliko se ne koristi aproksimacija $\Omega_{q+k} \sim \Omega_q$.

$$I = \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(-)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(-)}] = (\vec{k} = 0) \\ -\text{tr} \left[\gamma^\mu \gamma^0 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{q}}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} + \frac{m \gamma^0}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right) \gamma^\nu \gamma^0 \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{k}}{2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right]. \quad (\text{A.44})$$

Ovdje se $\frac{1}{\sqrt{|\vec{q} + \vec{k}|^2 + m^2}}$ aproksimira kao $\frac{1}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}}$. Ukoliko se stavi $\mu = 0$ i $\nu = y$ dobija se sljedeći rezultati (isključujući članove koji su već izračunati):

$$-\frac{1}{4\epsilon_{\vec{q}}} \text{tr}[\gamma^y \gamma^i] k^i + \frac{1}{4\epsilon_{\vec{q}}^2} \text{tr}[\gamma^0 \gamma^i \gamma^y \gamma^j] q^i k^j - \frac{m}{4\epsilon_{\vec{q}}^2} \text{tr}[\gamma^0 \gamma^y \gamma^i] k^i = -\frac{imk}{2(|\vec{q}|^2 + m^2)} \quad (\text{A.45})$$

Jedini doprinos dolazi od trećeg člana, uzimajući u obzir činjenicu da je $\vec{k} = (|\vec{k}|, 0)$.

Druga dva traga su:

$$II + III = \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(-)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(+)}] + \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^0 \Omega_q^{(+)} \gamma^\nu \gamma^0 \Omega_{q+k}^{(-)}] = (\vec{k} = 0) \\ + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\gamma^\mu \gamma^0 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{q}}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} + \frac{m \gamma^0}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right) \gamma^\nu \gamma^0 \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{k}}{2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right] \\ - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\gamma^\mu \gamma^0 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{q}}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} - \frac{m \gamma^0}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right) \gamma^\nu \gamma^0 \frac{\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{k}}{2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right] \quad (\text{A.46})$$

Članovi linearni po \vec{k} za $\Pi^{0y}(k)$ su:

$$-\frac{1}{2(|\vec{q}|^2 + m^2)} \text{tr}[\gamma^x \gamma^i \gamma^y \gamma^x] q^i k + \frac{m}{2(|\vec{q}|^2 + m^2)} \text{tr}[\gamma^0 \gamma^y \gamma^x] k = \frac{imk}{|\vec{q}|^2 + m^2} \quad (\text{A.47})$$

Sada je moguće izračunati vodeći nenulti član za $\Pi^{0y}(k)$.

$$\begin{aligned}
\Pi_{(-+)}^{0y} + \Pi_{(+-)}^{0y} &= -\frac{ikm}{4\pi} \int_{q_F}^{\Lambda} dq \frac{q}{(q^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ikm}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} \right] \\
\Pi_{(-+)}^{0y} + \Pi_{(+-)}^{0y} &\sim -\frac{ikm}{4\pi\sqrt{q_F^2 + m^2}} \\
\Pi_{(--)}^{0y} &= -\frac{imk}{2(q_F^2 + m^2)} \Pi^{00}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Rezultat koji se dobija sumiranjem ovih članova je:

$$\Pi^{0y}(k) = -\frac{imk}{4\pi\sqrt{q_F^2 + m^2}} \left[\sqrt{\frac{k_0^2}{k_0^2 - \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2}} \theta(k_0^2 - \frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2) - i \sqrt{\frac{k_0^2}{\frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2 - k_0^2}} \theta(\frac{q_F^2}{q_F^2 + m^2} k^2 - k_0^2) \right]. \tag{A.49}$$

Kraće zapisano, Chern-Simons član je:

$$-\frac{imk}{2\pi(q_F^2 + m^2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{\mu} \Pi^{00}(k) \right). \tag{A.50}$$

Drugi član dolazi od $(--)$ dijela koji nije divergentan, pa za bozonsko polje ide u 0. Članovi $(+-)$ i $(-+)$ sa dodatkom ghost polja su:

$$\begin{aligned}
\Pi_{PV(+)}^{0y}(k) + \Pi_{PV(-)}^{0y}(k) &= -\frac{ikm}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} \right] \\
&+ \frac{ikM}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{q_F^2 + M^2}} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} \right].
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Drugi i četvrti član su 0 i jedina razlika u odnosu na početni polarizacioni tenzor je u trećem članu, koji je u limitu visoke mase ($q_F \ll M$):

$$\Pi_{PV(+)}^{0y}(k) + \Pi_{PV(-)}^{0y}(k) = -\frac{ikm}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{q_F^2 + m^2}} + \frac{ik}{4\pi} \frac{M}{|M|}. \tag{A.52}$$

Chern-Simons član regularizovan pomoću Pauli-Villars regularizacije je:

$$\Pi_{PV}^{0y}(k) = -\frac{imk}{2\pi(q_F^2 + m^2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{\mu} \Pi^{00}(k) \right) + \frac{ik}{4\pi} \text{sgn}(M). \tag{A.53}$$

Zaključak je da je PV regularizacija uklonila visoko-energetske divergencije, ali je dodala član $\frac{ik}{4\pi} \text{sgn}(M)$ u Chern-Simons komponentu polarizacionog tenzora. Ovo se i očekuje u skladu sa prethodnom diskusijom.

Literatura

- [1] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College, 1976.
- [2] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*. Phys. Rev. Lett. 45 494, (1980).
- [3] Richard E. Prange, Steven M. Girvin. *The Quantum Hall Effect*. Springer-Verlag New York, 1990.
- [4] David Tong. *Lectures on the Quantum Hall Effect*. arXiv:1606.06687 [hep.th].
- [5] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard. *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*. Phys. Rev. Lett. 48 1559, (1982).
- [6] Dam Thanh Son. *Is the composite fermion a Dirac particle?*. Physical Review X 5.3 (2015): 031027.
- [7] Andrew C. Potter, Maksym Serbyn, Ashvin Vishwanath. *Thermoelectric Transport Signatures of Dirac Composite Fermions in the Half-Filled Landau Level*. Physical Review X 6 (2016): 031026.
- [8] Alexander L. Fetter, John Dirk Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Courier Corporation, 2003.
- [9] V.A. Miransky, G.W. Semenoff, I.A. Shovkovy, L.C.R. Wijewardhana. *Color superconductivity and nondecoupling phenomena in 2+1 dimensional QCD*. Physical Review D 64 (2001): 025005.
- [10] C. Manuel. *Hard dense loops in a cold non-Abelian plasma*. Physical Review D 53 (1996): 5866.
- [11] Jainendra K. Jain. *Composite fermions*. Cambridge University Press, 2007.
- [12] Eduardo Fradkin. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [13] John W. Negele, Henri Orland. *Quantum Many-particle Systems*. Addison-Wesley Pub. Co., 1988.
- [14] Shamit Kachru, Michael Mulligan, Gonzalo Torroba, Huajia Wang. *Mirror symmetry and the half-filled Landau level*. Physical Review B 92 (2015): 235105.
- [15] Zhiqiang Wang, Sudip Chakravarty. *Pairing of particle-hole symmetric composite fermions in half-filled Landau level*. Physical Review B 94 (2016): 165138.

-
- [16] L. Antić, J. Vučićević, M.V. Milovanović. *Paired states at $5/2$: Particle-hole Pfaffian and particle-hole symmetry breaking*. Physical Review B 98 (2018): 115107.
- [17] B.I. Halperin, Patrick A. Lee, Nicholas Read. *Theory of the half-filled Landau level*. Physical Review B 47 (1993): 7312.
- [18] Shou Cheng Zhang. *The Chern-Simons-Landau-Ginzburg theory of the fractional quantum Hall effect*. International Journal of Modern Physics B, Vol.6, No.1 (1992) 25-58.
- [19] Dam Thanh Son. *The Dirac Composite Fermion of the Fractional Quantum Hall Effect*. arXiv:1805.04472 [cond-mat.mes-hall].
- [20] C. Wang, N. R. Cooper, B. I. Halperin, and A. Stern. *Particle-Hole Symmetry in the Fermion-Chern-Simons and Dirac Descriptions of a Half-Filled Landau Level*. Physical Review X 7 (2017): 031029.
- [21] F.D.M. Haldane *Berry Curvature on the Fermi Surface: Anomalous Hall Effect as a Topological Fermi-Liquid Property*. Physical Review Letters 93 (2004): 206602.
- [22] S.A. Kivelson, D.H. Lee, Y. Grotov, J. Gan. *Composite-fermion Hall conductance at $\nu = 1/2$* . Physical Review B 55 (1997): 15552.
- [23] G. Moore and N. Read. *Nonabelions in the fractional quantum hall effect*. Nuclear Physics B, vol. 360, no. 2–3, pp. 362–396, Aug. 1991.
- [24] N. Read, Dmitry Green. *Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect*. Phys. Rev. B 61 (2000): 10267.
- [25] R. B. Laughlin. *Nobel Lecture: Fractional quantization*. Rev. Mod. Phys. 71 (1999): 863.
- [26] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English. *Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect*. Phys. Rev. Lett. 59 (1987): 1776.
- [27] Mitali Banerjee, Moty Heiblum, Vladimir Umansky, Dima E. Feldman, Yuval Oreg, and Ady Stern. *Observation of half-integer thermal Hall conductance*. Nature 559, (2018): 205–210.