

Fizički fakultet
Univerziteta u Beogradu

Milan Radonjić

Kvantni Holov efekat u grafenu

diplomski rad

Mentor: dr. Milica Milovanović

Beograd, oktobar 2007.

Ovaj rad je nastao u Laboratoriji za primenu računara u nauci Instituta za fiziku u Zemunu.

Zahvaljujem svima koji su imali i najmanji doprinos izvedbi i konačnom obliku ovog rada. Posebno se zahvaljujem dr. Milici Milovanović na pruženoj pomoći i ukazanoj pažnji.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Kvantni Holov efekat	3
2.1	Celobrojni efekat	6
2.2	Uloga neuređenja	7
2.3	Lafinov argument	9
2.4	Uloga topologije	11
2.5	Berijeva faza	15
3	Grafen - ugljenik u dve dimenzije	19
3.1	Kvantni Holov efekat u jednosloju grafena	21
3.2	Elektronska struktura grafena	24
3.2.1	Model jake veze	24
3.2.2	KED ₂₊₁ opis grafena	26
3.3	Landauovi nivoi u grafenu	29
3.4	Objašnjenje KHE preko Berijeve faze	31
4	Dvoslojni grafen	34
4.1	Elektronska struktura dvoslojnog grafena	34
4.2	Kvantni Holov efekat u dvosloju	38
4.3	Landauovi nivoi u dvoslojnom grafenu i objašnjenje KHE	40
4.4	Berijeva faza i KHE u dvosloju	45
5	Zaključak	47
	Literatura	48

1 Uvod

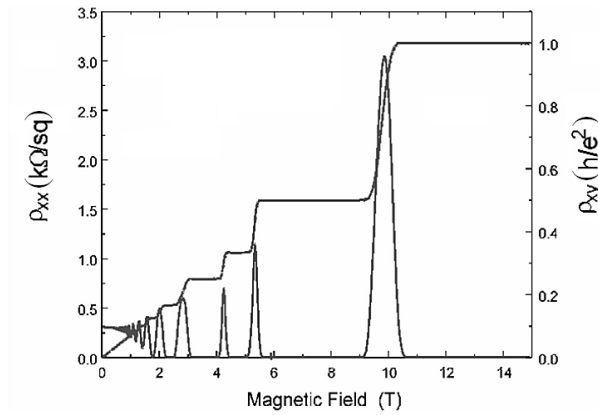
Kvantni Holov efekat (KHE) je jedan od primera kvantnih fenomena koji se pojavljuju na makroskopskim skalama. Od kako je otkriven 1980. godine predmet je velikog interesovanja u naučnim krugovima. KHE je otvorio mnoge probleme i rasvetlio mnoge značajne aspekte kvantne fizike i produbio naše razumevanje interagujućih sistema. Doveo je do formiranja novih teorijskih koncepata kao i do uspostavljanja novog metrološkog standarda, kvanta otpornosti h/e^2 , koji sadrži samo fundamentalne konstante.

U poslednjih dvadeset godina mnogo pažnje je ukazano elektronskim svojstvima niskodimenzionalnih sistema u fizici kondenzovane materije. Primer za to su dvodimenzioni elektroni i šupljine u poluprovodničkim uređajima, mezoskopske heterostrukture sastavljene od tankih metalnih, superprovodnih i/ili feromagnetnih filmova, zatim kvantne žice i kvantne tačke. Zanimanje za takve sisteme dolazi uglavnom zbog činjenice da potpuno novi kvantni efekti dolaze do izražaja kako se dimenzionalnost sistema smanjuje. Kvantne osobine takvih sistema su standardno opisane Šredingerovom jednačinom po kojoj se kvazičestice ponašaju nerelativistički sa konačnom efektivnom masom. Nedavno je započelo veliko interesovanje za sasvim drugačiju klasu sistema fizike kondenzovane materije u kojima je dinamika nosilaca naelektrisanja određena Dirakovom jednačinom sa nultom efektivnom masom nosilaca. Takav sistem je prvi primer istinski dvodimenzionalnog sistema - grafen, jedan jedini sloj atoma ugljenika uređenih u šestougaoonu rešetku. Ubrzo po dobijanju prvih uzoraka otkrivene su brojne jedinstvene električne, hemijske i mehaničke osobine grafena. Primer su vrlo neuobičajeni polucelobrojni kvantni Holov efekat i Berijeva faza π , što nedvosmisleno ukazuje na postojanje Dirakovih fermiona u grafenu i izdvaja ga u odnosu na uobičajene dvodimenzionalne elektronske sisteme sa konačnom masom nosilaca. Ispostavlja se da nosioci naelektrisanja poseduju dodatni unutrašnji stepen slobode sličan kiralnosti ultrarelativističkih elementarnih čestica. Na taj način je grafen postao neočekivana spojnica između fizike čvrstog stanja i kvantne elektrodinamike omogućivši da kvantno-relativistički fenomeni, od kojih su neki neuočljivi u eksperimentima fizike visokih energija, sada mogu biti oponašani i provereni u skromnim eksperimentima. Ubrzo nakon dobijanja jednoslojnog, postalo je moguće dobiti i višeslojni grafen. Dvoslojni grafen se takođe pokazao punim iznenađenja. Njegovi nosioci predstavljaju potpuno nov i kontroverzan tip čestica - masene kiralne fermione koji ne postoje u KED. Kao posledica toga uočen je i treći tip KHE - celobrojni, ali bez platoa na nuli, kao i Berijeva faza 2π sa netrivijskim posledicama. Kombinacija jednoslojnog i dvoslojnog grafena omogućava da se uvidi koje osobine zavise od (bez)masenosti nosilaca, a koje od kiralnosti.

U drugom poglavlju dat je pregled KHE, zajedno sa Laffinovim argumentom i ulogom topologije u kvantizaciji Holove provodnosti. Poseban odeljak posvećen je Berijevoj fazi kojom se može objasniti uočeni KHE u grafenu. Treće poglavlje sadrži upoznavanje sa grafenom i izlaganje uočenog neuobičajenog KHE u jednoslojnom grafenu. KHE je rasvetljen razmatranjem elektronske strukture jednoslojnog grafena (sa naglaskom na KED opisu) i Landauovih nivoa. Poseban osvrt na KHE je dat iz perspektive Berijeve faze. Dvoslojnom grafenu i njegovoj osobenoj elektronskoj strukturi i uočenoj KHE posvećena je pažnja u četvrtom poglavlju. Takođe su dobijeni Landauovi nivoi i dato objašnjenje KHE preko Berijeve faze.

2 Kvantni Holov efekat

Kvantni Holov efekat je uočen na niskim temperaturama ($\leq 4\text{ K}$) u visoko pokretnom dvodimenzionom elektronskom gasu (2DEG) smeštenom u jako normalno magnetno polje (tipično, $B \sim 1 - 30\text{ T}$). 1980. godine von Klitzing, Dorda i Peper [1] uočili su da je Holova provodnost takvog sistema celobrojni umnožak kvanta provodnosti e^2/h (slika 2.1). Dve godine kasnije su Tsui, Stormer i Gosard [2] otkrili da na nižim temperaturama i u čistijim uzorcima Holova provodnost može uzimati i frakcione vrednosti e^2/h . Sistem koji odgovara 2DEG eksperimentalno se ostvaruje na spoju poluprovodnika i izolatora ili na spoju dvaju različitih poluprovodnika.

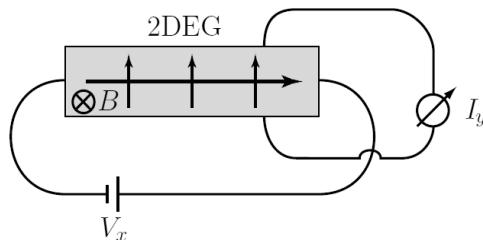


Slika 2.1: Podaci transportnih merenja za celobrojni kvantni Holov efekat: longitudinalna otpornost ρ_{xx} i Holova otpornost ρ_{xy} u funkciji magnetnog polja B za uzorak GaAs-AlGaAs niske pokretljivosti nosilaca.

Eksperimentalna postavka je shematski prikazana na slici 2.2. Naponska razlika V_x ostvarena duž uzorka pokreće električnu struju I_x u x -pravcu. Usled postojanja normalnog magnetnog polja B , pod dejstvom Lorencove sile nastaje Holova struja I_y u y -pravcu. Veza među veličinama I_y i V_x određuje Holovu provodnost. Preciznije, ključne veličine koje nas zanimaju su komponente σ_{xx} i σ_{xy} tenzora provodnosti:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

koji je određen relacijom $\mathbf{I} = \hat{\sigma}\mathbf{V}$, gde su $\mathbf{I} = (I_x, I_y)^T$ i $\mathbf{V} = (V_x, V_y)^T$ ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ usled simetrije). Inverz $\hat{\rho} = \hat{\sigma}^{-1}$ određuje tenzor otpornosti $\mathbf{V} = \hat{\rho}\mathbf{I}$. Za komponente ρ_{xy} (σ_{xy}) uobičajeni su nazivi Holova otpornost (provodnost). Da bi se kvantni Holov efekat bar kao pojava razumeo vrlo je važno imati na umu tenzorsku prirodu provodnosti i otpornosti. Naime, ukoliko je $\rho_{xy} \neq 0$ i longitudinalna otpornost $\rho_{xx} = 0$, tada je i longitudinalna provodnost $\sigma_{xx} = 0$, za razliku od neograničenog rasta σ_{xx} u slučaju da su pomenute veličine skalari.



Slika 2.2: Shematski prikaz eksperimentalne postavke za merenje kvantnog Holovog efekta.

U kontekstu KHE, prirodne jedinice za fluks magnetnog polja i dužinu su, respektivno, kvant fluksa ϕ_0 i magnetna dužina l_B definisani izrazima:

$$\phi_0 = \frac{h}{e}, \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{e|B|}}. \quad (2.2)$$

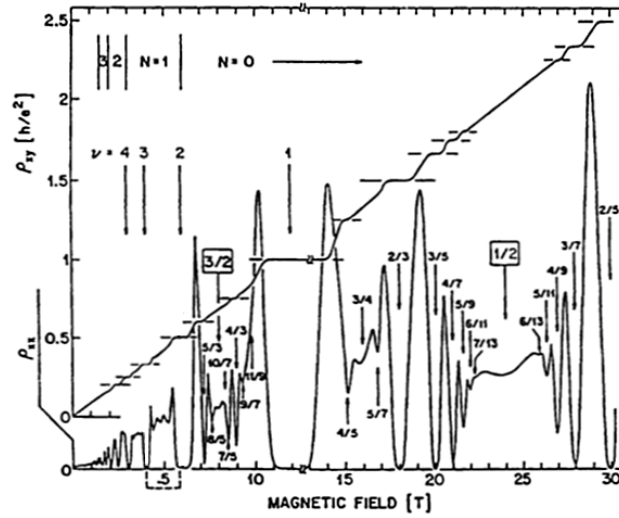
Magnetna dužina je stoga određena uslovom da je fluks ϕ magnetnog polja B kroz površinu kruga poluprečnika l_B jednak jednom kvantu ϕ_0 . Veličine koje se nužno pojavljuju u razmatranju su i broj elektrona u 2DEG uzorka N i njihova koncentracija n . Za analizu i bolji uvid u eksperimentalne rezultate uvodi se faktor popunjenosti (ili jednostavno popunjenost) ν sledećim izrazom:

$$\nu = \frac{N}{\phi/\phi_0} = \frac{nh}{e|B|}, \quad (2.3)$$

koji je bezdimenziona mera gustine 2DEG u magnetnom polju i zapravo predstavlja broj elektrona po kvantu fluksa magnetnog polja kroz površinu uzorka. Ispostavlja se da ν odgovara i broju popunjenih Landauovih nivoa (otuda i naziv popunjenost).

Eksperiment nam govori da je sasvim pogrešno govoriti o KHE kao o jednoj pojavi. Trebalo bi zapravo govoriti o kvantnim Holovim efektima - čitavom dijapazonu veoma različitih pojava. Biće pomenuto samo nekoliko najupečatljivijih opažanja objedinjenih zajedničkim nazivom kvantni Holov efekat. Da bi se stekao utisak o raznolikosti pojava, na slici 2.3 su prikazani odgovarajući eksperimentalni podaci. Slika prikazuje Holovu otpornost ρ_{xy} (gornja neopadajuća kriva) i longitudinalnu otpornost ρ_{xx} (donja kriva veoma nepravilnog oblika) dvodimenzionog elektronskog gasa dobijenog na heterospoju GaAs-AlGaAs kao funkciju primenjenog normalnog magnetnog polja. Umesto klasično očekivane i nimalo zanimljive Drudeove linearne zavisnosti $\rho_{xy}(B) = B/(ne)$ i približno konstantne zavisnosti $\rho_{xx}(B)$ uočavaju se krive sa veoma bogatom strukturom.

Detaljnijim udubljanjem u podatke može se uočiti nekoliko karakterističnih podstruktura. Pri slabim magnetnim poljima javljaju se očekivane Šubnikov–de Hazove oscilacije. Sa povećanjem polja za njima slede platoi u $\rho_{xy} = h/(\nu e^2)$ (koji su glavna karakteristika KHE) pri vrednostima polja koja odgovaraju frakcionim popunjenostima $\nu \in \mathbb{Q}$ zbog čega je KHE u tom slučaju i dobio epitet "frakcioni". Među njima se posebno izdvajaju platoi za celobrojne popunjenosti $\nu \in \mathbb{N}$ i takav KHE ima poseban naziv "celobrojni". Platoi u ρ_{xy} su praćeni dramatičnim padom longitudinalne otpornosti ρ_{xx} koja je bitno velika samo prilikom prelaska među platoima.



Slika 2.3: Podaci transportnih merenja za kvantni Holov efekat: longitudinalna otpornost ρ_{xx} i Holova otpornost ρ_{xy} u funkciji magnetnog polja B za uzorak GaAs-AlGaAs visoke pokretljivosti nosilaca. Uočljiva je pojava celobrojnog i frakcionog KHE. Podaci su dobijeni na temperaturi $T = 85\text{mK}$ za uzorak gustine nosilaca $3 \times 10^{11}\text{cm}^{-2}$ i pokretljivosti $1.3 \times 10^6\text{cm}^2/\text{Vs}$.

Prethodne činjenice se mogu objediniti u iskaz da za skoro sve pomenute vrednosti ν , pri $T \rightarrow 0$, tenzor provodnosti 2DEG ima oblik:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \nu e^2/h \\ -\nu e^2/h & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Kao što je napomenuto, usled tenzorske prirode otpornosti i provodnosti ρ_{xx} i σ_{xx} se anuliraju istovremeno. Dalje, porast od platoa do narednog platoa kao funkcija temperature opisan je određenim dobro definisanim stepenim zakonom što ukazuje na fazni prelaz drugog reda - kvantni Holov prelaz na $T = 0$. Slabije uočljiva je druga generacija Šubnikov–de Hazovih oscilacija pri $\nu = 1/2$. Na kraju, ispostavlja se da postoje izvesna pravila u frakcionim vrednostima ν za koje su uočeni platoi. Naime, odsustvuju platoi za neke male razlomke kao što je npr. $1/4$. Skup razlomaka za koje je KHE uočen poznat je pod nazivom "kvantna Holova hijerarhija". Efekat presudno zavisi od $\nu \sim n/|B|$ što ukazuje da je odnos koncentracije elektrona i jačine magnetnog polja centralan za fiziku KHE.

Može se postaviti pitanje zašto se kvantni Holov efekat javlja baš u dvodimenzionim sistemima? Poznato je da za otpornost ρ i otpor R klasičnog sistema oblika hiperkocke dimenzije d i dužine stranice L , važi veza $R = \rho L^{2-d}$. U dve dimenzije se stoga ove dve veličine podudaraju. To ima za posledicu da se pri prelasku sa otpornosti koju određuju mikroskopske teorije na eksperimentalno mereni otpor ne pojavljuju veličine određene geometrijom uzorka. Između ostalog to povlači da nije potrebno meriti fizičke dimenzije uzorka sa preciznošću od 10^{-10} da bi se dobila provodnost sa istom. Ispostavlja se da, budući da je disipacija skoro nula u režimu u kome se ostvaruje kvantni Holov efekat, čak ni oblik uzorka ni lokacija priključaka za merenje Holovog napona ne utiču na rezultat merenja.

Kvantizacija Holove provodnosti je izuzetno precizna. U slučaju celobrojnog KHE pokazano je da von Klippingova konstanta definisana kao $R_K = \nu \rho_{xy}(\nu)$, gde je ν popunjenost koja odgovara platonu, ne zavisi od izbora platoa, vrste uzorka i ostalih promenljivih (u odgovarajućim granicama) sa preciznošću od bar 3.5×10^{-10} . Pitanje tačnosti kvantizacije, tj. da li je R_K tačno h/e^2 , je znatno suptilnije. Da bi se na to dao odgovor potrebno je poređenje nezavisnih merenja R_K i h/e^2 . Ispitivanja su potvrdila da je R_K jednako $h/e^2 \approx 25812.807\Omega$ sa tačnošću od najmanje 10^{-7} . Egzaktna jednakost $R_K = h/e^2$ ima značajne posledice. Budući da je brzina svetlosti c egzaktno definisana veličina merenje R_K omogućava određivanje konstante fine strukture $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$, sa greškom manjom od 3×10^{-8} . Sa druge strane, α se može odrediti iz merenja anomalije magnetnog momenta elektrona $a_e = g-2$ (g je žiromagnetni odnos elektrona) pod pretpostavkom ispravnosti teorijskih izračunavanja ove veličine u okvirima kvantne elektrodinamike (KED). Pitanje tačnosti KHE je stoga blisko povezano sa tačnošću KED! Zbog izuzetne preciznosti KHE se danas koristi kao laboratorijski standard za otpor.

2.1 Celobrojni efekat

Teorija kvantnog Holovog efekta bavi se fizičkim svojstvima dvodimenzionog elektronskog sistema u limitu u kome je magnetno polje tako jako da mešanje Landauovih nivoa usled potencijala uzrokovanog neuređenostima i nečistoćama ili usled potencijala elektron-elektron interakcije može biti smatrano slabom perturbacijom. Ovakav limit se označava kao kvantni Holov režim. Kvalitativno, fizička svojstva tada zavise samo od odnosa potencijala neuređenosti i potencijala elektron-elektron interakcije. Takvi sistemi imaju neobične i zanimljive osobine jer nema energijske skale pridružene odgovarajućem članu u jednočestičnom hamiltonijanu koji bi predstavljao osnovu za perturbativni račun. Primeri energijske skale su širina elektronskih traka u periodičnom potencijalu kristala i Fermijeva energija elektronske tečnosti u odsustvu magnetnog polja. Neuređenost ili interakcije, ili u opštem slučaju oba efekta, moraju biti uračunati korišćenjem nekog neperturbativnog pristupa. Ni interakcije ni neuređenost ne mogu se uvek smatrati slabim. Ono što je bitno je zapravo odnos njihovih energijskih skala. Limit mnogo jačeg potencijala neuređenosti odgovara celobrojnog kvantnog Holovom režimu, dok limit mnogo jačeg potencijala elektron-elektron interakcije odgovara frakcionom kvantnom Holovom režimu. Usled toga dati uzorak može biti u celobrojnog kvantnog Holovom režimu pri jednoj jačini magnetnog polja i u frakcionom režimu pri drugoj jačini polja. Da bi se dalo objašnjenje celobrojnog KHE nije neophodno uzeti u obzir elektron-elektron interakcije, koje igraju ključnu ulogu u objašnjenju frakcionog KHE.

Za početak treba razmotriti najjednostavniji idealizovani slučaj 2DEG bez neuređenja i u aproksimaciji nezavisnih elektrona. Orbitalna dinamika elektrona naelektrisanja $-e < 0$ i efektivne mase m^* u xy -ravni u normalnom uniformnom magnetnom polju $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ($B > 0$) opisana je hamiltonijanom:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*}(-i\nabla + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A})^2, \quad (2.5)$$

gde je $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ vektorski potencijal koji zadovoljava $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$. Svojsvene energije su dobro poznate:

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

pri čemu je $\omega_c = eB/m^*$ ciklotronska frekvencija. Pri pisanju hamiltonijana (2.5) ignorisan je spin elektrona. To se može učiniti ukoliko je Zemanovo cepanje mnogo manje od $\hbar\omega_c$ što jeste slučaj

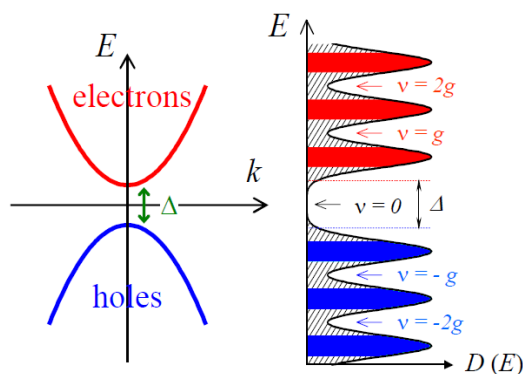
za magnetna polja koja se koriste u ispitivanju KHE. Dobijeni nivoi poznati su pod nazivom Landauovi nivoi. Degeneracija svakog od Landauovih nivoa jednaka je broju kvanata fluksa kroz površinu uzorka ϕ/ϕ_0 i sledi iz komutiranja datog hamiltonijana (2.5) sa operatorima magnetnih translacija. Na taj način, gustina stanja po Landauovom nivou je $n_B = B/\phi_0 = eB/h$, što je već napomenuto pri uvođenju faktora popunjenosti ν . Ukoliko posmatramo višečestični problem neophodno je uzeti u obzir kinematičku korelaciju među elektronima usled njihove fermionske prirode. Rezultat ove jednostavne analize je da spektar 2DEG u magnetnom polju nema procepa osim pri gustinama elektrona koje odgovaraju celom broju popunjenih Landauovih nivoa, $\nu \in \mathbb{N}$.

U odsustvu nesavršenosti i na $T = 0$, dvodimenzioni elektronski gas je translatorno invarijantan. U slučaju potpune popunjenosti određenog broja Landauovih nivoa Holova provodnost takvog sistema mora biti kvantovana tj. celobrojni umnožak kvanta e^2/h . Za translatorno invarijantni sistem, čija su svojstva ista u svim inercijalnim referentnim sistemima, može se dati sledeći argument u prilog tome. Neka je spoljašnje magnetno polje \mathbf{B} normalno na ravan uzorka i neka je spoljašnje električno polje \mathbf{E} paralelno uzorku. Dalje, neka je popunjenost Landauovih nivoa ν ceo broj. To znači da je gustina elektrona $n = \nu eB/h$. Povezivanjem sistema za izvore elektrona dolazi do uspostavljanja struje. Posmatrano iz referentnog sistema koji se u odnosu na laboratorijski kreće brzinom $\mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ električno polje iščezava. Pošto u tom slučaju u pokretnom sistemu nema posebno fizički izdvojenog pravca, ne može biti ni struje. Tada je struja u laboratorijskom sistemu $\mathbf{j} = -nev$. Sledi da je Holova provodnost translatorno invarijantnog sistema linearna funkcija odnosa koncentracije elektrona i jačine magnetnog polja n/B tj. $\sigma_{xy} = ne/B$ (i uz to $\sigma_{xx} = 0$). Za popunjen ceo broj Landauovih nivoa Holova provodnost zaista je celobrojni umnožak kvanta provodnosti tj. $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$. Međutim, ovaj argument ne može da objasni činjenicu da uopšte postoje platoi u Holovoj provodnosti niti izvanrednu preciznost kvantizacije. Naime, u eksperimentu se mogu menjati gustina elektrona ili jačina spoljašnjeg magnetnog polja. U bilo kom od tih slučajeva, hemijski potencijal μ (tj. Fermijeva energija) mora da leži između Landauovih nivoa da bi izvesni Landauov nivo bio potpuno popunjen i sledeći potpuno prazan. Kako se n povećava (pri nepromenjenom B), hemijski potencijal trpi skokove od jednog do drugog Landauovog nivoa. Pri tome zadržava vrednost jednaku energiji Landauovog nivoa sve dok traje popunjavanje tog nivoa. To ukazuje da bi σ_{xy} trebalo da bude monotono rastuća funkcija n , bez platoa.

2.2 Uloga neuređenja

Kao što smo videli KHE odsustvuje u translatorno invarijantnom sistemu. Zato je prisustvo nečistoća i neuređenosti koje narušavaju translatornu invarijantnost od ključnog značaja za postojanje KHE. Objašnjenje opažanja platoa u σ_{xy} upravo uključuje prisustvo nečistoća i neuređenja kao i stanja na granici uzorka. Paradoksalno je da ekstremna univerzalnost transportnih svojstava u režimu koji odgovara kvantnom Holovom efektu nastaje usled, pre nego uprkos, slučajnom neuređenju i nekontrolisanim nesavršenostima neizbežno prisutnim u uzorku. Andersonova lokalizacija u prisustvu neuređenja igra osnovnu ulogu u kvantizaciji otpornosti i ona se bitno menja u snažnom magnetnom polju. Što se preciznosti kvantizacije tiče, ispostavilo se da su za neverovatnu preciznost kvantizacije odgovorna topološka svojstva kvantnih stanja sistema.

Razlog monotonog porasta Holove provodnosti idealnog sistema je činjenica da se hemijski potencijal skokovito menja sa jednog Landauovog na naredni kako se nivoi jedan za drugim



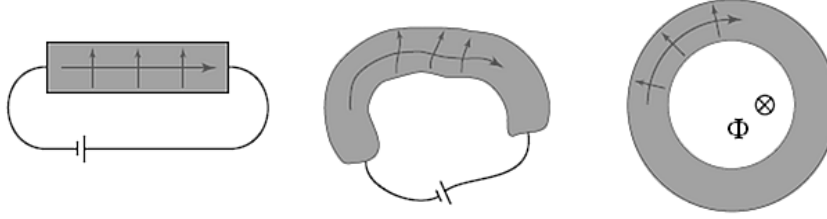
Slika 2.4: Gustina stanja 2DEG u magnetnom polju i u prisustvu neuređenosti. Landauovi nivoi se šire u trake. Uočljive su dve vrste stanja: delokalizovana (obeležena crveno za elektrone i plavo za šupljine) i lokalizovana obeležena osenčeno. g je eventualno prisutna dodatna degeneracija.

popunjavaju. Ukoliko bi postojala dodatna stanja koja su po energiji u procepu (tj. između Landauovih nivoa), hemijski potencijal bi pri popunjavanju morao da prođe preko tih nivoa. Ti dodatni nivoi ne bi trebalo da doprinose provođenju da bi postojali platoi.

Neuređenje nudi prirodan način za generisanje stanja "između Landauovih nivoa". Pre svega, izvestan stepen slučajne neuređenosti će ukloniti degeneraciju Landauovih nivoa i pritom formirati uske Landauove trake. Sve dok je potencijal neuređenja slab u poređenju sa $\hbar\omega_c$, pojedinačne Landauove trake ostaju međusobno razdvojene. U slučaju jakog neuređenja Landauove trake se spajaju u kontinuum. Na osnovu Andersonovih proučavanja elektronskih stanja u slučajnim potencijalima za očekivati je da će neka stanja postati lokalizovana. Rasprostranjeno je uverenje da su u odsustvu magnetnog polja sva elektronska stanja dvodimenzionog neuređenog sistema lokalizovana. U svakoj Landauovoj traci moraju postojati i delokalizovana stanja koja su nosioci Holove struje. Za očekivati je da takva delokalizovana stanja imaju energije bliske centrima Landauovih traka odnosno energijama prvobitnih Landauovih nivoa idealnog sistema (slika 2.4).

Kada postoji procep u spektru idealnog sistema, očekuje se da će njegove osobine biti prilično inertne prema slabim perturbacijama. Provodnost će zato biti nepromenjena dovoljno slabom neuređenošću. To je posledica činjenice da lokalizovana stanja, nastala usled neuređenosti, ne doprinose provodnosti na nuli temperature. Stoga male promene gustine elektrona, sve dok se takve promene ostvaruju na lokalizovanim stanjima, neće dovesti do izmene u provodnosti. Lokalizovana stanja se na taj način ponašaju kao unutrašnji rezervoar čestica i kvantno Holovo ponašanje u vidu platoa će se ispoljavati sve dok hemijski potencijal leži u procepu tj. sve dok traje popunjavanje lokalizovanih stanja. Holova struja, a time i provodnost, će trpeti promene samo u slučaju da se menja popunjenost delokalizovanih stanja što odgovara prelaženju hemijskog potencijala preko pojasa istih. U eksperimentu se to odražava kao prelazak sa platoa na plato. Takođe, širina pomenutog pojasa treba da teži nuli kad $T \rightarrow 0$. Takav zaključak sledi iz različitih teorija skaliranja i numeričkih simulacija kao i iz eksperimentalne činjenice da kada $T \rightarrow 0$, širina prelaznog regiona među susednim celobrojnim platoima teži nuli.

Budući da se spektar idealnog 2DEG u magnetnom polju sastoji od diskretnih Landauovih



Slika 2.5: Prevođenje osnovne Holove geometrije u oblik korišćen u Laffinovom argumentu.

nivoa, pri celobrojnim popunjenostima ν zaista postoji procep. Usled neuređenosti će se zato pojaviti plato u Holovoj provodnosti za vrednosti B za koje hemijski potencijal μ leži u procepu. Iako se to na prvi pogled ne očekuje zbog smanjenja broja stanja koja su nosioci struje, Holova provodnost neuređenog sistema pri celobrojnim popunjenostima ν jednaka je odgovarajućoj vrednosti idealnog sistema $\sigma_{xy} = (e^2/h)\nu$. Pokazuje se da elektroni iz delokalizovanih stanja prilikom prolaska blizu neuređenosti ubrzavaju taman toliko da nadoknade manjak struje koju ne prenose lokalizovana stanja. Takođe, provodnost će biti nezavisna od ν u nekoj okolini celobrojne vrednosti. Strogi argumenti u prilog ovakvoj tvrdnji zasnovani su na topološkoj invarijantnosti o čemu će biti više reči u narednom odeljku.

Na osnovu prethodnih zapažanja zaključuje se da je za osnovno objašnjenje (ili predviđanje) KHE u nekom sistemu dovoljno odrediti spektar Landauovih nivoa smatrajući sistem idealnim. Iz toga se mogu izvesti zaključci o vrednostima popunjenosti koje odgovaraju pojavi platoa kao i o vrednosti Holove provodnosti na njima.

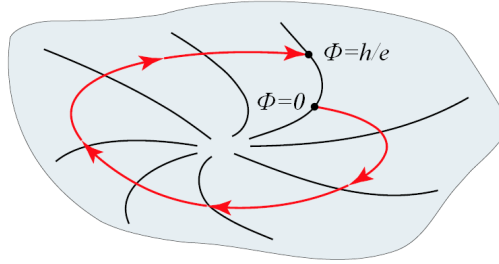
2.3 Laffinov argument

U realnim eksperimentima neizbežno su prisutne razne nepreciznosti. Različiti uzorci od različitih materijala imaju različite gustine elektrona, različite geometrije, različite nečistoće i neuređenosti. Povezivanje uzorka sa mernom aparaturom takođe je podložno nepreciznostima. Uprkos svemu tome Holova kvantizacija je, što deluje sasvim neverovatno, izuzetno precizna i univerzalna. Laffin je pokazao da je kvantizacija posledica gejdž-invarijantnosti sistema. Kasnije se pokazalo da je Holova provodnost topološka veličina i da ključnu ulogu u kvantizaciji igra činjenica da je njena vrednost na platoima u neposrednoj vezi sa topološkim invarijantama pod imenom Černovi brojevi.

Ubrzo nakon eksperimentalnog otkrića celobrojnog KHE, Laffin je dao sledeći argument kojim je kvantizacija Holove provodnosti mogla biti objašnjena pod veoma opštim uslovima [3]. Budući sasvim univerzalna, pojava kvantizacije mora biti neosetljiva na (neprekidnu) promenu geometrije uzorka. Koristeći tu slobodu, Laffin je predložio da se osnovna Holova geometrija uzorka podvrgne transformacijama prikazanim na slici 2.5. Iz standardne geometrije "Holove pločice" dobija se prstenasta geometrija više simetrije koja se često naziva Korbino geometrijom. Pri poslednjoj transformaciji prikazanoj na slici spoljašnji naponski izvor zamenjen je elektromotornom silom koja nastaje usled promenljivog fluksa Φ kroz šupljinu prstena.

Laffin je razmatrao evoluciju sistema prilikom adijabatske (tj. beskonačno spore) promene fluksa kroz prsten. Motivacija za to dolazi usled poznate činjenice da je za promene fluksa kroz prsten jednake celobrojnog umnošku kvanta fluksa $\delta\Phi = n \cdot \phi_0 = n \cdot h/e$, hamiltonijan

sistema gejdž-ekvivalentan početnom hamiltonijanu. Deo vektorskog potencijala kome odgovara promena $\delta\Phi$ je svuda u uzorku čist gejdž budući da je fluks lokalizovan van uzorka. Zato su stanja koja se ne pružaju oko šupljine neizmenjena promenom fluksa Φ kroz šupljinu (do na gejdž-transformaciju tj. na trivijalnu promenu faze). Stanja koja obuhvataju šupljinu su, međutim, osetljiva na promene Φ jer poprimaju Aharonov-Bomovu fazu $\oint \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi\delta\Phi/\phi_0$ koja je nezavisna od izbora gejdža. Ta faza je, međutim, trivijalna ako je $\delta\Phi/\phi_0 \in \mathbb{Z}$. Usled toga, kada se Φ promeni za ceo broj kvanata fluksa hamiltonijan (samim tim i spektar) ostaje isti kao pre promene, do na gejdž transformaciju. Razmotrimo šta se dešava ako postepeno izvršimo povećanje fluksa Φ od 0 do ϕ_0 . Situacija je prikazana na slici 2.6 gde svaka linija simbolički predstavlja bazis svojstvenih stanja hamiltonijana za datu vrednost fluksa. Svojstvena stanja



Slika 2.6: Shematski prikaz evolucije stanja sistema tokom adijabatske promene fluksa.

za različite flukseve su različita, tj. kako se fluks povećava od nule svako stanje evoluira po putanji koja je "ortogonalna" na skup trenutnih svojstvenih stanja, kao što je prikazano na slici 2.6. Na kraju procesa, za $\Phi = \phi_0$, dolazi se ponovo na početni bazis, budući da je hamiltonijan na kraju gejdž-ekvivalentan početnom za $\Phi = 0$. Naravno, to ne znači da se po završetku puta $\Phi = 0 \rightarrow \Phi = \phi_0$ pojedinačna bazisna stanja preslikavaju u sebe same. Dok se skup svojstvenih stanja kao celina održava, permutacije među pojedinačnim stanjima su dozvoljene i u saglasnosti su sa gejdž-invarijantnošću problema. Na taj način, jedina moguća promena sistema uzrokovana adijabatskom promenom fluksa kroz šupljinu za ceo broj ϕ_0 , je da prevede sistem iz jednog svojstvenog stanja početnog hamiltonijana u drugo. Povećanje fluksa kroz šupljinu stvara elektromotornu silu u prstenu koja, na osnovu klasičnog Holovog efekta, dovodi do prenosa elektrona sa jedne ivice prstena na drugu. Jednostavno izračunavanje pokazuje da je preneto naelektrisanje u toku jednog takvog procesa, mereno u jedinicama elementarnog naelektrisanja e , jednako Holovoj provodnosti merenoj u jedinicama kvanta provodnosti e^2/h . Stoga ukoliko razumemo kvantizaciju prenetog naelektrisanja u toku jednog procesa razumećemo i celobrojni KHE. Naelektrisanje koje se prenese nužno je celobrojni umnožak e , pa je zato i Holova provodnost celobrojni umnožak e^2/h .

Laflinov gejdž-argument pogađa topološku prirodu KHE: nezavisno od detalja sistema davanje kvanta fluksa kroz šupljinu prstena prenosi ceo broj elektrona preko sistema. U njemu su sadržani osnovni elementi argumenata koji će biti razmotreni u narednom odeljku: gejdž-invarijantnost kvantne mehanike u oblastima koje nisu prosto povezane, zajedno sa kvantizacijom broja prenetih elektrona. Jasno je da je argument invarijantan pod dejstvom malih perturbacija. To ukazuje da bi efekat mogao da se razume u smislu neke topološke invarijante koja je skrivena iza preslikavanja prostora parametara (u našem slučaju fluksa kroz prsten) u

Hilbertov prostor sistema. Naknadno su Taules, Kohmoto, Najtingejl i den Nijs (TKNdN) [4] kao i Avron i Seiler [5] zaista uspeli da strogo povežu kvantnu Holovu provodnost sa topološkom invarijantom - prvim Černovim brojem na dvodimenzionom torusu.

Potrebno je ukazati na činjenicu da kvantizacija Holove provodnosti ipak nije do kraja zasnovana. Gejdž-invarijantnost zaista ima za posledicu da se na kraju adijabatske promene fluksa za ϕ_0 sistem ponovo vraća u početno stanje i pri tome izvrši prenos određenog broja elektrona. Međutim, to ne garantuje da će prilikom ponavljanja postupka preneto naelektrisanje biti uvek isto. Samo u klasičnoj mehanici tačnom ponavljanju početnog stanja sistema sleduje ponavljanje rezultata merenja. U kvantnoj mehanici to nije nužno tako. Usled toga, ne može se samo na osnovu gejdž-invarijantnosti zaključiti da je isti broj elektrona prenesen prilikom ponavljanja istovetne adijabatske promene fluksa. To znači da ni kvantizacija Holove provodnosti nije sasvim objašnjena Laffinovim argumentom jer bi u srednjem mogla da odstupi od kvantovanih vrednosti. Da bismo je sasvim razumeli neophodno je pokazati da je preneseno naelektrisanje usrednjeno tokom mnogo ponavljanja pomenutog postupka zaista kvantovano. Upravo tu stupaju na scenu topološki kvantni brojevi koji kvantizuju srednje vrednosti.

2.4 Uloga topologije

Prvi izraz za Holovu provodnost koji je ukazao na topološku invarijantnost dobijen je u slučaju elektrona koji se kreću u uniformnom magnetnom polju i periodičnom potencijalu [4]. Za određivanje Holove provodnosti korišćena je Kuboova teorija linearnog odziva. Holova provodnost je bila određena veličinom za koju se ispostavlja da je topološki kvantni broj. Kasnije je pokazano da takav metod može biti proširen na mnogo opštiji slučaj.

Posmatrajmo dvodimenzioni neinteragujući sistem N elektrona u xy -ravni opisan hamiltonijanom:

$$H_0(\{\mathbf{r}\}, \{\mathbf{p}\}) = \sum_{i=1}^N h(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i), \quad \mathbf{r}_i = (x_i, y_i), \quad \mathbf{p}_i = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad (2.7)$$

$$\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}, \quad \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\} \quad (2.8)$$

gde je $h(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{r})$ jednočestični hamiltonijan koji sadrži kinetički član i eventualni spoljašnji potencijal (recimo potencijal rešetke). Uključivanjem normalnog magnetnog polja $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, hamiltonijan sistema postaje:

$$H(\{\mathbf{r}\}, \{\mathbf{p} + e\mathbf{A}\}) = \sum_{i=1}^N h(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)), \quad (2.9)$$

gde je $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$. Neka su ϵ_β i $|\beta\rangle$ svojstvene energije i talasne funkcije hamiltonijana (2.9) tj. $H|\beta\rangle = \epsilon_\beta|\beta\rangle$ i neka je ϵ_α energija osnovnog stanja. Pretpostavlja se da postoji procep između osnovnog i pobuđenih stanja. Treba odrediti provodnost sistema u osnovnom stanju.

Neka se u trenutku $t = 0$ sistem nalazi u osnovnom stanju $|\Psi_\alpha(t = 0)\rangle = |\alpha\rangle$ i neka je u istom trenutku uključeno spoljašnje slabo konstantno električno polje $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ kome odgovara dodatni vektorski potencijal $\delta\mathbf{A}$. U gejdžu $\delta\mathbf{A} = -\mathbf{E}t$ i $\delta A_0 = 0$, hamiltonijan sistema postaje vremenski zavistan:

$$H(t) = \sum_{i=1}^N h(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) - e\mathbf{E}t). \quad (2.10)$$

Evolucija stanja sistema $|\Psi_\alpha(t)\rangle$ će biti opisana vremenski zavisnom Šredingerovom jednačinom $H(t)|\Psi_\alpha(t)\rangle = i\hbar\partial|\Psi_\alpha(t)\rangle/\partial t$. Neka su $\epsilon_\beta(t)$ i $|\beta(t)\rangle$ trenutne svojstvene energije i talasne funkcije hamiltonijana (2.10) tj. $H(t)|\beta(t)\rangle = \epsilon_\beta(t)|\beta(t)\rangle$. Stanje $|\Psi_\alpha(t)\rangle$ se može razviti u red po stanjima $|\beta(t)\rangle$. Na taj način se dobija:

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \epsilon_\alpha(\tau)d\tau\right)\{\langle\alpha(t)|\langle\alpha(t)|\Phi_\alpha(t)\rangle + i\hbar\sum_{\beta\neq\alpha}|\beta(t)\rangle\frac{\langle\beta(t)|\partial\Phi_\alpha(t)/\partial t\rangle}{\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t)}\}, \quad (2.11)$$

gde je $|\Phi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t \epsilon_\alpha(\tau)d\tau\right)|\Psi_\alpha(t)\rangle$. Evolucija stanja $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ odvija se po jednačini $(H(t)-\epsilon_\alpha(t))|\Phi_\alpha(t)\rangle = i\hbar\partial|\Phi_\alpha(t)\rangle/\partial t$ iz koje je $(\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t))\langle\beta(t)|\Phi_\alpha(t)\rangle = i\hbar\langle\beta(t)|\partial\Phi_\alpha(t)/\partial t\rangle$, što je iskorišćeno u (2.11). Budući da je u početnom trenutku $|\Psi_\alpha(0)\rangle = |\Phi_\alpha(0)\rangle = |\alpha(0)\rangle = |\alpha\rangle$ imamo $\langle\alpha(0)|\Phi_\alpha(0)\rangle = 1$ i $\langle\beta(0)|\Phi_\alpha(0)\rangle = 0$ za $\beta \neq \alpha$. Pošto je električno polje slabo sistem se sporo menja u vremenu, pa će za dovoljno kratko vreme t biti $\langle\alpha(t)|\Phi_\alpha(t)\rangle \approx 1$ i $\langle\beta(t)|\Phi_\alpha(t)\rangle \approx 0$ za $\beta \neq \alpha$ (adijabatska aproksimacija). Tada je stanje sistema do na prvi red po vremenskom izvodu dato izrazom:

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \epsilon_\alpha(\tau)d\tau\right)\{\langle\alpha(t)| + i\hbar\sum_{\beta\neq\alpha}|\beta(t)\rangle\frac{\langle\beta(t)|\partial\alpha(t)/\partial t\rangle}{\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t)}\}. \quad (2.12)$$

Očekivana vrednost proizvoljnog operatora M (koji ne sadrži vremenske izvode) u tom stanju je:

$$\begin{aligned} \langle\Psi_\alpha(t)|M|\Psi_\alpha(t)\rangle &= \langle\alpha(t)|M|\alpha(t)\rangle + i\hbar\sum_{\beta\neq\alpha}|\beta(t)\rangle\frac{\langle\beta(t)|M|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|\partial\beta(t)/\partial t\rangle}{\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t)} \\ &\quad + i\hbar\sum_{\beta\neq\alpha}|\beta(t)\rangle\frac{\langle\alpha(t)|M|\beta(t)\rangle\langle\beta(t)|\partial\alpha(t)/\partial t\rangle}{\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Za dalja razmatranja potreban je operator gustine struje koji je dat negativnim varijacionim izvodom hamiltonijana po ukupnom vektorskom potencijalu $\mathcal{A} = \mathbf{A} - \mathbf{E}t$:

$$\mathbf{j} = -\delta H(t)/\delta\mathcal{A}. \quad (2.14)$$

Iz $\langle\beta(t)|\alpha(t)\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ i $\langle\beta(t)|H(t)|\alpha(t)\rangle = \epsilon_\alpha(t)\delta_{\alpha\beta}$ dobijaju se sledeće relacije $\langle\beta(t)|\partial\alpha(t)/\partial t\rangle = -\langle\partial\beta(t)/\partial t|\alpha(t)\rangle$ i $\langle\beta(t)|\partial H(t)/\partial t|\alpha(t)\rangle = (\epsilon_\alpha(t)-\epsilon_\beta(t))\langle\beta(t)|\partial\alpha(t)/\partial t\rangle$, za $\beta \neq \alpha$. U razmatranom slučaju vreme ulazi u hamiltonijan preko dodatnog člana vektorskog potencijala $\delta\mathbf{A} = -\mathbf{E}t$, pa je $\partial H(t)/\partial t = \delta H(t)/\delta\mathcal{A} \cdot \partial\mathcal{A}/\partial t = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Pomoću pomenutih relacija dobijamo očekivanu vrednost operatora gustine struje:

$$\begin{aligned} \langle\Psi_\alpha(t)|\mathbf{j}|\Psi_\alpha(t)\rangle &= \langle\alpha(t)|\mathbf{j}|\alpha(t)\rangle + i\hbar\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\langle\beta(t)|\mathbf{j}|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}|\beta(t)\rangle}{(\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t))^2} \\ &\quad - i\hbar\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\langle\alpha(t)|\mathbf{j}|\beta(t)\rangle\langle\beta(t)|\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}|\alpha(t)\rangle}{(\epsilon_\beta(t)-\epsilon_\alpha(t))^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vremenska zavisnost koja se u formuli javlja posledica je specifičnog izbora gejdža. Očekivane vrednosti fizičkih veličina moraju biti gejdž-nezavisne. Ukoliko bismo prešli u gejdž u kome je

$\delta A'_0 = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ i $\delta \mathbf{A}' = \mathbf{0}$, vremenska zavisnost bi iščezla. Zato se mogu koristiti vrednosti u početnom trenutku $\epsilon_\beta(0) = \epsilon_\beta$ i $|\beta(0)\rangle = |\beta\rangle$ koje odgovaraju sistemu bez električnog polja. Ukoliko je sistem smešten unutar pravougaonika stranica L_x i L_y tada je Holova provodnost u stanju $|\Psi_\alpha(t)\rangle$ data izrazom:

$$(\sigma_{xy})_\alpha = \frac{i\hbar}{L_x L_y} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\langle \alpha | j_y | \beta \rangle \langle \beta | j_x | \alpha \rangle - \langle \alpha | j_x | \beta \rangle \langle \beta | j_y | \alpha \rangle}{(\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha)^2}. \quad (2.16)$$

Dobijena formula poznata je kao Kuboova formula za Holovu provodnost.

Jednočestični hamiltonijan $h(\mathbf{r}, \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))$ komutira sa operatorima magnetnih translacija:

$$\hat{t}(\mathbf{a}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\pi}\right), \quad (2.17)$$

gde su $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} - e\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ generatori magnetnih translacija. Oni zadovoljavaju komutacione relacije $[\pi_i, p_j] = 0$, $i, j = x, y$, što znači da komutiraju sa $h(\mathbf{r}, \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))$. Međutim, generatori ne komutiraju međusobno, već je $[\pi_x, \pi_y] = i\hbar eB$. Odatle sledi da operatori translacija komutiraju sa jednočestičnim hamiltonijanom i zadovoljavaju tzv. magnetnu algebru:

$$\hat{t}(\mathbf{a})\hat{t}(\mathbf{b}) = \exp\left(-i\frac{eB}{\hbar}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_z\right)\hat{t}(\mathbf{b})\hat{t}(\mathbf{a}). \quad (2.18)$$

Neka je fluks magnetnog polja kroz sistem celobrojni umnožak kvanta fluksa tj. $BL_x L_y = N_\phi \phi_0$, $N_\phi \in \mathbb{N}$. Tada važi:

$$\hat{t}(L_x \mathbf{e}_x)\hat{t}(L_y \mathbf{e}_y) = \hat{t}(L_y \mathbf{e}_y)\hat{t}(L_x \mathbf{e}_x), \quad (2.19)$$

jer je $\exp(-ieB/\hbar \cdot L_x L_y (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_z) = \exp(-2\pi i N_\phi) = 1$. To znači da se svojstvene funkcije $|n\rangle$ jednočestičnog hamiltonijana mogu izabrati tako da budu svojstvene i za $\hat{t}(L_x \mathbf{e}_x)$ i $\hat{t}(L_y \mathbf{e}_y)$:

$$\hat{t}(L_x \mathbf{e}_x) |n(\mathbf{k})\rangle = \exp(ik_x L_x) |n(\mathbf{k})\rangle, \quad \hat{t}(L_y \mathbf{e}_y) |n(\mathbf{k})\rangle = \exp(ik_y L_y) |n(\mathbf{k})\rangle. \quad (2.20)$$

Treba istaći da izbor $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ odgovara uopštenom periodičnom graničnom uslovu (UPGU) koji namećemo na talasne funkcije sistema. Svi neekvivalentni granični uslovi odgovaraju vrednostima $\mathbf{k} \in [0, 2\pi/L_x) \times [0, 2\pi/L_y)$. Pošto su izbori $k_{x,y} = 0$ i $k_{x,y} = 2\pi/L_{x,y}$ ekvivalentni prostor UPGU je torus. Izvršimo gejdž transformaciju $|n(\mathbf{k})\rangle \rightarrow |\tilde{n}(\mathbf{k})\rangle = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}) |n(\mathbf{k})\rangle$. Ona će rezultovati odgovarajućom transformacijom višestetičnih funkcija $|\alpha(\mathbf{k})\rangle \rightarrow |\tilde{\alpha}(\mathbf{k})\rangle = \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_1 + \dots + \hat{\mathbf{r}}_N)) |\alpha(\mathbf{k})\rangle$ i hamiltonijana sistema $H(\{\mathbf{r}\}, \{\mathbf{p} + e\mathcal{A}\}) \rightarrow \tilde{H}(\{\mathbf{r}\}, \{\mathbf{p} + e\mathcal{A}\}) = H(\{\mathbf{r}\}, \{\mathbf{p} + e\mathcal{A} + \hbar\mathbf{k}\})$. Kuboova formula u novom gejdžu se može dodatno uprostiti ukoliko primetimo da je:

$$\langle \alpha(\mathbf{k}) | \mathbf{j} | \beta(\mathbf{k}) \rangle = \langle \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) | \tilde{\mathbf{j}} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle = -\langle \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) | \delta \tilde{H} / \delta \mathcal{A} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle = -e/\hbar \langle \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) | \partial \tilde{H} / \partial \mathbf{k} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2.21)$$

kao i:

$$\langle \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) | \partial \tilde{H} / \partial \mathbf{k} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle = (\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha) \langle \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) | \partial \tilde{\beta}(\mathbf{k}) / \partial \mathbf{k} \rangle = (\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) \langle \partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) / \partial \mathbf{k} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle. \quad (2.22)$$

Na taj način dobijamo:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xy})_\alpha &= \frac{ie^2}{\hbar L_x L_y} \sum_{\beta \neq \alpha} \left(\langle \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_y} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle \langle \tilde{\beta}(\mathbf{k}) | \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_x} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_x} | \tilde{\beta}(\mathbf{k}) \rangle \langle \tilde{\beta}(\mathbf{k}) | \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_y} \rangle \right) \\ &= \frac{ie^2}{\hbar L_x L_y} \left(\langle \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_y} | \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_x} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_x} | \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_y} \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

U slučaju neinteragujućih elektrona poslednja formula se može prikazati u obliku:

$$\begin{aligned}\langle(\sigma_{xy})_\alpha\rangle &= \frac{ie^2}{\hbar L_x L_y} \sum_{i=1}^N \left(\langle \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_y} | \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_x} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_x} | \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_y} \rangle \right) \\ &= \frac{ie^2}{\hbar L_x L_y} \sum_{\{\varepsilon_i\}}^{occ} f(\varepsilon_i) \left(\langle \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_y} | \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_x} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_x} | \frac{\partial \tilde{n}_i(\mathbf{k})}{\partial k_y} \rangle \right),\end{aligned}\quad (2.24)$$

gde se poslednja suma vrši po popunjenim stanjima. $|\tilde{n}_1(\mathbf{k})\rangle, \dots, |\tilde{n}_N(\mathbf{k})\rangle$ su jednočestična stanja od kojih je izgrađeno višestetično stanje $|\tilde{\alpha}(\mathbf{k})\rangle$, dok je $f(\varepsilon_i)$ broj jednočestičnih stanja energije ε_i .

Iz dosadašnjeg izvođenja ne može se videti zašto bi Holova provodnost trebalo da bude kvantizovana. Posmatrajmo zato Holovu provodnost usrednjenu po svim neekvivalentnim UPGU:

$$\langle(\sigma_{xy})_\alpha\rangle = \frac{e^2}{h} \times \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi/L_x} \int_0^{2\pi/L_y} \left(\langle \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_x} | \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_y} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_y} | \frac{\partial \tilde{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_x} \rangle \right) dk_x dk_y. \quad (2.25)$$

Dobijeni izraz ima isti oblik kao i integral u originalnoj teoriji TKNdN, osim što se umesto Blohiovih talasnih brojeva pojavljuju brojevi iz UPGU. Usrednjena Holova provodnost $\langle(\sigma_{xy})_\alpha\rangle$ je zato srazmerna prvom Černovom broju C_1 koji je topološka invarijanta. Naime, talasna funkcija $|\tilde{\alpha}(\mathbf{k})\rangle$ predstavlja preslikavanje torusa graničnih uslova na kompleksni projektivni prostor normalizovanih talasnih funkcija proizvoljne faze. Integral u (2.25) je $2\pi i$ puta celobrojna invarijanta koja definiše prvu Černovu klasu tog preslikavanja. Stoga je Holova provodnost celobrojni umnožak e^2/h .

Černov broj je topološki u smislu da je invarijantan u odnosu na male promene hamiltonijana sistema. Male promene hamiltonijana dovode do malih promena svojstvenih funkcija i, kao što se može pomisliti, do malih promena Černovog broja. Međutim, pošto je u pitanju ceo broj, neće se uopšte promeniti ako mora da se menja neprekidno. Zaključuje se da grafik Černovog broja mora imati platoe. Postavlja se pitanje kako dolazi do promena sa jednog platoa na naredni? Velike deformacije hamiltonijana mogu dovesti do toga da osnovno stanje "pređe preko" ostalih svojstvenih stanja. Kada se takvo "ukrštanje nivoa" dogodi podintegralna veličina divergira i Černov broj nije više dobro određen. Dakle, prelazi među platoima se odvijaju prilikom ukrštanja nivoa.

U određenoj eksperimentalnoj postavci granični uslovi su fiksni, pa bi za izračunavanje Holove provodnosti trebalo koristiti (2.23). Međutim, u energijskom spektru sistema postoji konačni procep između osnovnog stanja i pobuđenih. Pokazuje se da u slučaju kada hemijski potencijal leži u procepu Holova provodnost poseduje svojstvo eksponencijalne lokalnosti [7], što je čini neosetljivom na granične uslove. Zato je razlika između merene vrednosti $(\sigma_{xy})_\alpha$ pri fiksним eksperimentalnim graničnim uslovima i srednje vrednosti $\langle(\sigma_{xy})_\alpha\rangle$ eksponencijalno mala u termodinamički velikim sistemima. Ovo opravdava korišćenje Holove provodnosti usrednjene po graničnim uslovima radi poređenja sa eksperimentom.

Prepoznavanje Holove provodnosti kao topološke invarijante nije samo matematička formalnost, već ima i odgovarajući fizički sadržaj. Njena stabilnost u odnosu na razne perturbacije je upravo posledica topološke invarijantnosti. U prisustvu neuređenosti hemijski potencijal se može zadržavati u spektru lokalizovanih stanja što daje platoe sa kvantovanim vrednostima Holove provodnosti. Postojanje procepa iznad osnovnog stanja je diskretno svojstvo sistema koje ne

zavisi kontinualno od perturbacija. Stoga je vrednost na platoima neosetljiva u odnosu na male promene, što objašnjava izuzetnu preciznost Holove kvantizacije.

Dobijena formula (2.25) se može direktno primeniti na sistem slobodnih neinteragujućih elektrona smeštenih na torusu. Pod pretpostavkom da je najniži Landauov nivo popunjen, a ostali prazni dobija se da usrednjena Holova provodnost ima vrednost $\langle \sigma_{xy} \rangle = e^2/h$ [21] (poglavlje 9.7). To znači da je doprinos jednog potpuno popunjenog Landauovog nivoa Holovoj provodnosti jednak upravo kvantu provodnosti e^2/h . Ova činjenica će biti korišćena u objašnjenju KHE u grafenu.

2.5 Berijeva faza

Berijeva faza [9] je kvantna faza koju zadobijaju stanja sistema prilikom spore ciklične evolucije. Ona predstavlja naročitu popravku kvantne adijabatske teoreme i blisko je povezana sa Born-Openhajmerovom aproksimacijom. Berijeva elegantna i uopštena analiza našla je primene u različitim oblastima kao što su fizika kondenzovane materije, atomska i nuklearna fizika, fizika elementarnih čestica i optika.

Posmatrajmo hamiltonijan $H(\mathbf{R})$ koji zavisi od parametara R_1, R_2, \dots, R_N , koji su komponente vektora \mathbf{R} . Pretpostavimo da $H(\mathbf{R})$ ima bar jednu diskretnu i nedegenerisanu svojstvenu energiju $E_i(\mathbf{R})$ sa odgovarajućim svojstvenim stanjem $|\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$. Ukoliko se vektor \mathbf{R} menja u vremenu, tada $|\Psi_i(\mathbf{R}(t))\rangle$ nije egzaktno rešenje vremenski zavisne Šredingerove jednačine $H(\mathbf{R}(t))|\Psi(\mathbf{R}(t))\rangle = i\hbar\partial|\Psi(\mathbf{R}(t))\rangle/\partial t$. Međutim, ako se \mathbf{R} dovoljno sporo menja, sistem neće preći u drugo svojstveno stanje tj. verovatnoća za takav prelaz će težiti nuli. Umesto toga, sistem će se prilagođavati promenama hamiltonijana. Navedena pretpostavka predstavlja adijabatsku aproksimaciju. Primer takve adijabatičnosti je, recimo, čestica u beskonačno dubokoj potencijalnoj jami čija se širina menja dovoljno sporo da čestica uvek biva u svojstvenom stanju koje odgovara istom kvantnom broju. “Dovoljno sporo” ima sledeće formalno značenje. Neka se $\mathbf{R}[t/T]$ menja tokom vremenskog intervala $0 \leq t \leq T$. Što je T veće to je promena \mathbf{R} sporija. Ako je u trenutku $t = 0$ sistem u stanju $|\Psi_i(\mathbf{R}[0])\rangle$, tada će u trenutku $t = T$ biti u stanju $e^{i\phi_i(T)}|\Psi_i(\mathbf{R}[1])\rangle$ sa verovatnoćom koja teži jedinici kako T teži beskonačnosti. To sledi na osnovu kvantne adijabatske teoreme. Faza $\phi_i(t)$ se dobija zamenom $e^{i\phi_i(t)}|\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$ u vremenski zavisnu Šredingerovu jednačinu:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i\phi_i(t)}|\Psi_i(\mathbf{R}[t/T])\rangle = H(\mathbf{R}[t/T])e^{i\phi_i(t)}|\Psi_i(\mathbf{R}[t/T])\rangle, \quad (2.26)$$

i projektovanjem obeju strana jednačine na stanje $|\Psi_i(\mathbf{R}[t/T])\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\phi_i(t) = i\langle\Psi_i(\mathbf{R}[t/T])|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi_i(\mathbf{R}[t/T])\rangle\frac{d\mathbf{R}}{dt} - \frac{E_i(\mathbf{R}[t/T])}{\hbar}. \quad (2.27)$$

Na taj način je:

$$\begin{aligned} \phi_i(t) - \phi_i(0) &= \int_0^t d\tau [i\langle\Psi_i(\mathbf{R}[\tau/T])|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi_i(\mathbf{R}[\tau/T])\rangle\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} - \frac{E_i(\mathbf{R}[\tau/T])}{\hbar}] \\ &= \int_{\mathbf{R}[0]}^{\mathbf{R}[1]} i\langle\Psi_i(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi_i(\mathbf{R})\rangle d\mathbf{R} - \frac{1}{\hbar} \int_0^t d\tau E_i(\mathbf{R}[\tau/T]). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Integrand $\mathcal{A}_B = i\langle\Psi_i(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$ je Berijev vektorski potencijal koji odgovara stanju $|\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$. Pošto je $\langle\Psi_i(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi_i(\mathbf{R})\rangle = -\langle\nabla_{\mathbf{R}}\Psi_i(\mathbf{R})|\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$, Berijev potencijal je realna veličina. Drugi deo (2.28) predstavlja dinamičku fazu.

Ukupna faza kvantnog stanja nije opservabla. Međutim, kvantni sistem može biti u superpoziciji stanja. Relativna faza tih stanja jeste opservabilna. Razmotrimo dva puta $\mathbf{R}[t/T]$ i $\mathbf{R}'[t/T]$ sa istim početnim i krajnjim tačkama $\mathbf{R}[0] = \mathbf{R}'[0]$ i $\mathbf{R}[1] = \mathbf{R}'[1]$. Pretpostavimo da sistem evoluira u superpoziciji stanja $|\Psi_i(\mathbf{R}[t/T])\rangle$ i $|\Psi_i(\mathbf{R}'[t/T])\rangle$. U trenutku $t = T$ relativna faza ove superpozicije sadrži dva dela. Jedan je relativna dinamička faza, a drugi je tzv. Berijeva faza koja je jednaka razlici između integrala \mathcal{A}_B duž puta \mathbf{R} i integrala duž puta \mathbf{R}' tj. kružnom integralu \mathcal{A}_B duž zatvorene putanje Γ koju čine put \mathbf{R} i u suprotnom smeru uzet put \mathbf{R}' :

$$\gamma_{Berry} = \oint_{\Gamma} \mathcal{A}_B(\mathbf{R})d\mathbf{R}. \quad (2.29)$$

Treba primetiti da je Berijeva faza čisto geometrijski objekat nezavistan od brzine kojom se menja $\mathbf{R}(t)$ i zavisi jedino od putanje opisane u prostoru parametara. Zato se naziva i geometrijskom fazom. Ova faza je dobro definisana u smislu da je nezavisna od proizvoljnog izbora faza talasnih funkcija $|\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$. Naime, ako pomnožimo stanje $|\Psi_i(\mathbf{R})\rangle$ faznim faktorom $e^{i\Lambda(\mathbf{R})}$, čime ono ostaje trenutno svojstveno stanje $H(\mathbf{R})$ iz istog pravca projektivnog prostora, Berijev potencijal \mathcal{A}_B će se promeniti za $-\nabla_{\mathbf{R}}\Lambda(\mathbf{R})$. Pošto je promena \mathcal{A}_B čist gradijent tj. gejdž transformacija, integral \mathcal{A}_B po zatvorenoj putanji će ostati nepromenjen.

Može se uočiti analogija između vektorskog potencijala magnetnog polja u običnom prostoru i Berijevog vektorskog potencijala u prostoru parametara. Kao što je uobičajeno može se uzeti rotor vektorskog potencijala i dobiti pridruženo magnetno polje. Berijeva faza zadobijena cikličnom evolucijom po nekoj putanji tako predstavlja fluks odgovarajućeg "magnetnog" polja kroz bilo koju površ u prostoru parametara \mathbf{R} razapetu nad tom putanjom. U običnom prostoru izvor magnetnog polja su struje. Nameće se prirodno pitanje šta je izvor Berijevog "magnetnog" polja?

Kao vrlo slikovit primer, razmotrimo hamiltonijan čestice spina 1/2:

$$H = \mu \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mu > 0, \quad (2.30)$$

gde su $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Paulijeve spinske matrice. Hamiltonijan ima dve svojstvene energije $E_{\pm} = \pm\mu R$, koje postaju degenerisane za $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Svojstvena talasna funkcija $|\Psi_+(R, \theta, \varphi)\rangle$ koja odgovara svojstvenoj energiji $E_+ = \mu R$ određuje se iz uslova $\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} |\Psi_+(R, \theta, \varphi)\rangle = R |\Psi_+(R, \theta, \varphi)\rangle$ i data je izrazom:

$$|\Psi_+(R, \theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

gde je $R_z = R \cos \theta$ i $R_x + iR_y = R e^{i\varphi} \sin \theta$. Berijev potencijal izražen u funkciji R , θ i φ je:

$$\mathcal{A}_B = -\frac{1 - \cos \theta}{2R \sin \theta} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (2.32)$$

Izračunajmo Berijevu fazu koju zadobije stanje $|\Psi_+(R, \theta, \varphi)\rangle$ u slučaju da \mathbf{R} sporo rotira oko z -ose pri konstantnom θ :

$$\begin{aligned} \gamma_{Berry} &= \int_0^{2\pi} (\mathcal{A}_B)_{\varphi} \cdot R \sin \theta d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{2} \Omega_{\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

gde je $\Omega_{\mathbf{R}}$ prostorni ugao pod kojim se opisani put \mathbf{R} vidi iz koordinatnog početka. Pomoću Stoksove teoreme se može pokazati da je integral \mathcal{A}_B duž bilo koje putanje u \mathbf{R} -prostoru jednak $-1/2$ puta prostorni ugao pod kojim se ta putanja vidi iz koordinatnog početka. Ovo je upravo Aharonov-Bomova faza koja se očekuje za česticu jediničnog naelektrisanja koja se kreće po površini sfere koja okružuje magnetni monopol jačine $-1/2$ u svom centru $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Ukoliko nađemo rotor (2.32) dobićemo "magnetno" polje $-\mathbf{R}/(2R^3)$ što je polje koje odgovara monopolu jačine $-1/2$ smeštenom u tački degeneracije hamiltonijana $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Uočljivo je da druga komponenta talasne funkcije ne teži jedinstvenoj vrednosti kako se približavamo "južnom polu" $\theta = \pi$ iz različitih pravaca. Ovakav problem ne postoji na "severnom polu" jer je tu $\sin\theta/2 = 0$. Zbog toga se spinor (2.31) ne može definisati globalno na sferi. Ukoliko bismo pomnožili spinor faznim faktorom $e^{-i\varphi}$, on bi bio dobro definisan u blizini južnog pola, ali bi bio singularan na severnom polu $\theta = 0$. Sledi da se spinor može definisati samo na podoblastima prostora parametara. U našem slučaju su dovoljne dve podoblasti, jedna koja isključuje severni pol i druga koja isključuje južni. Pošto se Berijev potencijal dobija korišćenjem gradijenta spinora, sledi da je i on definisan deo po deo, a ne globalno. Berijev potencijal (2.32) poseduje singularitet za $\theta = \pi$. Takva konfiguracija je poznata pod nazivom Dirakova struna. Linijski integral duž beskonačno male petlje koja okružuje južni pol jednak je celokupnom fluksu monopola. U stvari, potencijalu (2.32) ne odgovara monopol u koordinatnom početku, već beskonačno tanka tuba (Dirakove strune) duž negativne z -ose čiji se celokupni fluks skuplja u koordinatnom početku odakle se radialno širi. Fluks strune je razlog što beskonačno mala petlja oko južnog pola daje doprinos koji je jednak celom fluksu. Južni pol nije ni po čemu specijalan kada razmatramo monopol, pošto je on sferno simetričan. To se odražava u činjenici da se Dirakova struna može pomerati gejdž-transformacijom. Na primer, Berijev potencijal \mathcal{A}'_B izračunat korišćenjem spinora $e^{-i\varphi} |\Psi_+(R, \theta, \varphi)\rangle$ ima singularitet na severnom polu i povezan je sa \mathcal{A}_B gejdž-transformacijom. Efekat monopola može se opisati bez ikakvih struna. Kada naelektrisana čestica particle opisuje petlju, zadobija dodatnu fazu srazmernu prostornom uglu pod kojim se petlja vidi iz tačke u kojoj je monopol. Vektorski potencijal predstavlja analitički način da se pređe na prostorni ugao Stoksovom teoremom, ali to nije globalno izvodljivo.

Razmatrani primer je prilično opšteg tipa. Kad god se dva nedegenerisana energijska nivoa ukrštaju u nekoj tački prostora parametara, hamiltonijan sistema u blizini te tačke svodi se na efektivni 2×2 hamiltonijan koji povezuje degenerisana stanja:

$$H_{eff}(\mathbf{R}) = const \times \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.34)$$

pri čemu je u tački degeneracije $\mathbf{f}(\mathbf{R} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Stoga se uvek kada dođe do ukrštanja dva diskretna nedegenerisana nivoa efektivno pojavljuje "magnetni" monopol u tački ukrštanja, kao što je i u prethodnom primeru bio slučaj. Monopolu odgovara Berijevo "magnetno" polje:

$$\mathcal{B} = -\frac{\mathbf{f}(\mathbf{R})}{2|\mathbf{f}(\mathbf{R})|^3}. \quad (2.35)$$

Dakle, izvor Berijevog "magnetnog" polja su "magnetni" monopoli u tačkama prostora parametara u kojima je hamiltonijan sistema dvostruko degenerisan. Kao što smo videli na primeru, tačke degeneracije $H(\mathbf{R})$ su singulariteti Berijevog potencijala u prostoru parametara i imaju bitan uticaj na geometrijsku fazu. Ovo podseća na ulogu singulariteta analitičke funkcije, ali analogija nije potpuna. Ukoliko bi Berijeva faza bila potpuno određena singularitetima \mathcal{A}_B tada

bi "magnetno" polje bilo suma "magnetnih" polja monopola smeštenih u tačkama degeneracije i stoga bi imalo multi rotor. To zapravo nije slučaj jer multi rotor, za razliku od nulte divergencije, nije svojstvo koje je invarijantno pod deformacijama \mathbf{R} -prostora. U opštem slučaju izvori Berijevog "magnetnog" polja nisu samo monopoli već i "struje" kontinualno raspoređene u prostoru parametara.

Primer spina 1/2 takođe prikazuje kako Berijeva faza može biti topološka. Petlja u \mathbf{R} određuje dva prostorna ugla, baš kao što petlja na površini sfere razdvaja površ na dva dela. Postavlja se pitanje zašto onda Berijeva faza nije dvosmislena? Odgovor leži u činjenici da je kod sfere razlika prostornih uglova jednaka $\pm 4\pi$. Takva razlika prostornih uglova odgovara razlici u fazama od $\mp 2\pi$, što je neuočljivo. U ovom slučaju Berijeva faza podleže ograničenju koje dolazi usled topologije sfere. Da smo, hipotetički, došli do potrebe za razmatranjem magnetnog monopola unutar torusa razlika prostornih uglova ne bi bila $\pm 4\pi$, pa Berijeva faza ne bi bila jednoznačno definisana.

Moguće je uspostaviti vezu između izraza za Holovu provodnost i Berijeve faze. Naime, formuli (2.25) može se dati sledeći pogodniji oblik:

$$\begin{aligned} \langle (\sigma_{xy})_\alpha \rangle &= \frac{e^2}{2\pi h} \int_0^{2\pi/L_x} \int_0^{2\pi/L_y} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial k_x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial k_y} \right) dk_x dk_y \\ &= \frac{e^2}{2\pi h} \oint_C \mathcal{A}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{k}) = -i \langle \tilde{\alpha} | \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \mathbf{k}} \rangle, \end{aligned} \quad (2.36)$$

gde kontura integracije C predstavlja obod oblasti $[0, 2\pi/L_x) \times [0, 2\pi/L_y)$. Uvedeno vektorsko polje $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ liči na Berijev vektorski potencijal u prostoru UPGU. Na taj način je izrazu za Holovu provodnost dat oblik koji veoma podseća na izraz za Berijevu fazu. Kviziklasično gledano, čestice opisuju kružnice u impulsnom prostoru prilikom kretanja u magnetnom polju. Ukoliko bi \mathbf{k} -prostor UPGU bio impulsni prostor tada bi Holova provodnost bila u vezi sa Berijevom fazom koju čestice zadobijaju kretanjem po kružnicama koje obuhvataju tačke u kojima se javlja ukrštanje energijskih nivoa. Kao što ćemo videti, takav argument se koristi za objašnjenje KHE u grafenu.

3 Grafen - ugljenik u dve dimenzije

Ugljenik je hemijski element sa jedinstvenom ulogom u prirodi. Nastaje najpre u zvezdama u procesu fuzije triju α -čestica i preko njega nastaju svi teži elementi u kosmosu. Zadivljujuća je sposobnost ugljenika da obrazuje složene mreže i samim tim i veoma brojna i po svojstvima raznovrsna tzv. organska jedinjenja koja su od suštinskog značaja za živi svet. Čak i u elementarnom obliku ugljenik pokazuje neobične mogućnosti formiranja vrlo različitih alotropskih modifikacija. Još od davnina poznati dijamant i grafit našli su brojne primene u mnogim sferama ljudskog života. Nedavno otkriveni fulereni i nanotube su već pod budnim okom fizičara i hemičara sa velikim izgledima za primenu u novim tehnologijama. Sve do nedavno bile su poznate samo trodimenzione (dijamant i grafit), jednodimenzione (nanotube) i nuladimenzione (fulereni) alotropske modifikacije ugljenika. Dvodimenzioni oblik ugljenika bio je upadljivo odsutan i do skora uspešno odolevao pokušajima da se eksperimentalno uoči.

Ravanski sloj atoma ugljenika uređenih u dvodimenzionu šestouglaonu rešetku nazvan je grafen. Pomena je vredna činjenica da iako nedavno eksperimentalno uočen, grafen (ili "2D grafit") predstavlja teorijski najbolje proučen oblik ugljenika. Predmet je teorijskog interesa počevši od kasnih četrdesetih godina. Budući da se može zaviti u 0D fulerene, umotati u 1D nanotube i napakovati u 3D grafit, koristi se kao polazna tačka za sva izračunavanja osobina pomenutih oblika ugljenika. Tokom osamdesetih uočeno je da grafen obezbeđuje realizaciju (2+1)-dimenzione kvantne elektrodinamike što je dodatno pospešilo njegovo izučavanje. Sa druge strane, brojni pokušaji da se sintetišu takvi dvodimenzioni atomski kristali su bili neuspešni što nije začuđujuće usled opšteg ubeđenja da dvodimenzioni kristali ne mogu da postoje. Pre više od 70 godina, Landau i Pajerls su pokazivali da su strogo 2D kristali termodinamički nestabilni i da ne mogu postojati. Njihova teorija je ukazivala na činjenicu da divergentni doprinos termalnih fluktuacija dovodi u niskodimenzionim kristalnim rešetkama do pomeraja atoma koji su poredivi sa međuatomskim rastojanjem na bilo kojoj konačnoj temperaturi. Ovaj argument su docnije proširili Mermin i Vagner i on je bio podržan brojnim eksperimentima. Na primer, temperatura topljenja tankih filmova brzo opada sa opadanjem njihove debljine te oni postaju nestabilni pri debljinama od, tipično, desetak atomskih slojeva. Na sreću, postoji način da se ovaj problem zaobiđe. Interakcije sa 3D strukturama stabilizuju 2D kristale tokom njihovog rasta. Usled toga je moguće dobiti 2D kristale umetnute između ili formirane površ atomskih ravni odgovarajućih 3D kristala. U takvom obliku grafen već postoji u grafitu za koji se može reći da je sačinjen od slojeva grafena povezanih međusobno Van der Valsovim silama. Ovo uliva nadu da je moguće na dovoljno niskim temperaturama nekako izdvojiti sloj grafena tako da zadrži stanje zadobijeno u 3D strukturi.

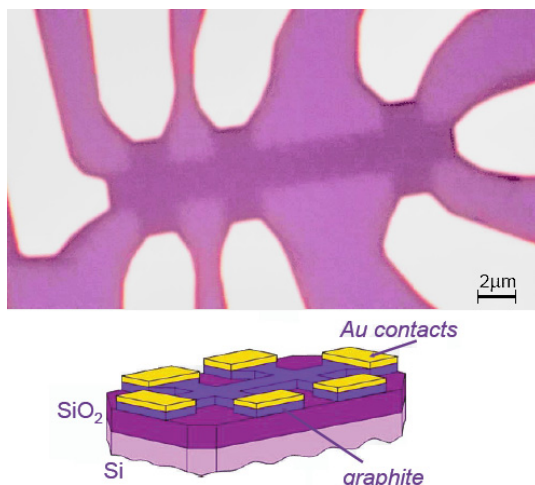
Ispostavlja se da su slojevi grafena, kao i uostalom i fulereni i nanotube, oduvek bili doslovno pred našim očima. Trag grafitne olovke sadrži uglavnom već vidljive ostatke grafita. Međutim, tanji skoro providni kristalići, od kojih su neki i jednoslojni, takođe su prisutni. Problem ne predstavlja dobijanje grafena već njegovo pronalaženje u hrpi ostataka veće debljine. Tipično, nekoliko kristala grafena veličine mikrometra nalazi se u polju ostataka grafita površine 1 cm^2 . Skeniranje elektronskim mikroskopom nije od pomoći u potrazi jer ne pravi razliku među jed-

noslojnim i višeslojnim kristalima. Atomic-force i scanning-tunneling mikroskopi obezbeđuju potrebnu atomsku rezoluciju, ali obično mogu da detektuju prelaz između podloge i jednosloja samo kada je podloga glatka na atomskoj skali. Još veći problem predstavlja potreba da se na atomskom rezolucijom pregleda cela površina traga olovke.

Grupa sa Mančesterskog univerziteta, predvođena Gajmom i Novoselovom, je 2004. godine koristeći pomenuti pristup uspela da dobije grafen i započela revoluciju na tom polju. Grupa je takođe dobila i dvodimenzione kristale drugih materijala: boron-nitrida, dihalogenida i visokotemperaturnog superprovodnika Bi-Sr-Ca-Cu-O. Njihov izbor pogodne podloge pao je na silicijum-dioksid, materijal koji je naširoko korišćen u poluprovodničkoj industriji. Površina oksida reflektuje skup duginih boja i interferenciona slika od slojeva grafena na oksidu pruža slab, ali ipak vidljiv kontrast. Na sreću, ljudsko oko i mozak su dovoljno moćni da raspoznaju čak i tako slab kontrast tokom pregleda ostataka grafita optičkim mikroskopom. Uz nešto iskustva, nalaženje tih nekoliko kristala grafena traje samo nekoliko sati.

Niko, naravno, ne koristi olovke za dobijanje grafena. Umesto toga grafit se pažljivo prevlači preko silicijumske pločice pažljivo odabrane debljine. Čak iako je poznat tačan recept, potrebna je posebna pažnja i istrajnost da bi se pronašao grafen. Na primer, čak i odstupanje od 5% u debljini SiO₂ (315 nm umesto standardnih 300 nm) može učiniti potpuno nevidljivim jedan sloj grafena. Nedavno je otkriveno da se grafen može jasno prepoznati Raman mikroskopijom što ovu tehniku čini pogodnom za brzo određivanje debljine. Međutim, čak i tada je neophodno prethodno izvršiti pretragu optičkim mikroskopom. Ovakvu tehniku "crtanja" je već nekoliko laboratorija usavršilo do nivoa umetnosti. Na ovaj način se mogu dobiti uzorci grafena veličine i do 100 μm i oni su već dostupni na tržištu. Pojedinačni kristali veličine od nekoliko hiljada kvadratnih mikrona, koji su takvog kvaliteta da se balistički transport i kvantni Holov efekat mogu uočiti čak i na sobnoj temperaturi, su sasvim dovoljni za proučavanje fundamentalne fizike, ispitivanje novih naprava i možda čak i složenih elektronskih kola. Međutim, za industrijske primene tehnika crtanja je zasigurno nepodesna. Ulaže se dosta truda da se grafen epitaksijalno formira termalnom dekompozicijom silikon-karbida ili napanjanjem ugljovodonika na katalitičkim metalnim površinama koje se kasnije mogu hemijski ukloniti. Grafen se može dobiti i u obliku praha izdvajanjem "grafen-oksida" iz oksida grafita i redukcijom do grafena. Iako će budućnost primene grafena zavisi od napretka u njegovom epitaksijalnom dobijanju, fizika ovog novog i zanimljivog 2D sistema je u potpunosti dostupna.

Prirodno se postavlja pitanje za kakav sistem se može reći da predstavlja 2D kristal? Očigledno je da jednosloj grafena predstavlja 2D kristal, dok 100 slojeva već treba smatrati tankim filmom 3D materijala. Ali na koliko slojeva prestaje 2D i počinje 3D kristal? U slučaju grafena to je nedavno razjašnjeno. Pokazano je da se elektronska struktura brzo menja sa brojem slojeva, približavajući se limitu 3D grafita već na 10 slojeva grafena. Štaviše, samo grafen i u dobroj aproksimaciji njegov dvosloj imaju jednostavan elektronski spektar: oba su poluprovodnici bez energijskog procepa (ili polumetali bez preklapanja valentne i provodne zone) sa po jednom vrstom elektrona i šupljina. Za tri i više slojeva spektar se bitno usložnjava: pojavljuje se nekoliko vrsta nosilaca i valentna i provodna zona počinju приметно da se preklapaju. Ovo omogućava da se jednosloj, dvosloj i više slojeva grafena (3 do 10) mogu razlikovati kao tri vrste 2D kristala. Deblje strukture se već mogu smatrati tankim filmovima grafita. Sa eksperimentalne tačke gledišta takva definicija je takođe razumna. Dužina ekraniranja u grafitu je oko 5 Å (što je manje od debljine dva sloja) te se mora praviti razlika između površinskih i zapreminskih efekata čak i za filmove od pet slojeva.

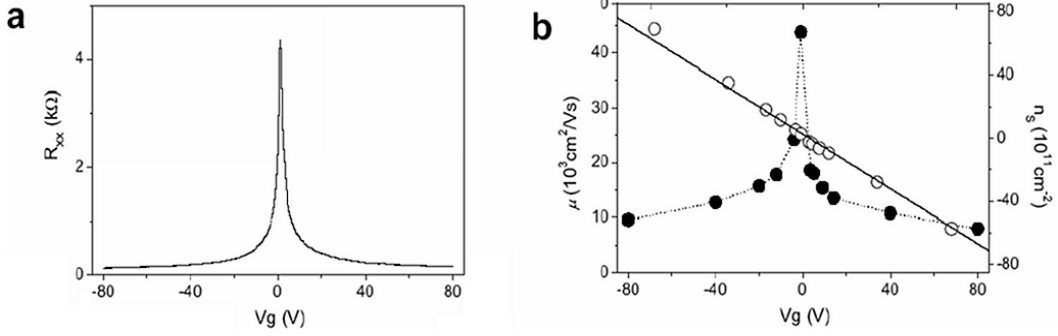


Slika 3.1: Eksperimentalna izvedba i šematski prikaz uzorka grafena prilagođenog za KHE merenja.

3.1 Kvantni Holov efekat u jednosloju grafena

Usled neobične i izuzetne elektronske strukture grafen predstavlja pravu riznicu neočekivanih i dosad neviđenih efekata u fizici kondenzovane materije. Nedavno po dobijanju prvih primeraka jednoslojnog grafena dve ekperimentalne grupe predvođene Zhengom[10] i Novoselovom[11] izvršile su nezavisno merenja funkcija odziva grafena u električnom i magnetnom polju. Uočen je neobičajan polucelobrojni kvantni Holov efekat pri popunjenosti Landauovih nivoa $4(N + 1/2)$ i njemu odgovarajuća Berijeva faza π , zatim minimalna provodnost σ_{xx} od $\approx 4e^2/h$ kada koncentracija nosilaca teži nuli i određena je ciklotronska masa data izrazom $m_c = E/v_F^2$, gde je $v_F \approx 10^6 m/s$ "brzina svetlosti" inače bezmasenih fermiona u grafenu. Dobijeni rezultati su bitno drugačiji od odgovarajućih u slučaju poluprovodnika i metala i otvaraju široke mogućnosti primene grafena u elektronici.

Uzorci grafena dobijeni su već opisanom tehnikom odvajanja od grafita na silicijumskoj pločici presvučenoj slojem SiO_2 debljine 300 nm korišćenjem standardnih postupaka mikromanipulacije. Posle izbora odgovarajućeg uzorka grafena pridodate su elektrode za transportna merenja upotrebom elektronske litografije praćene naparavanjem sloja zlata debljine 30 nm i hroma debljine 5 nm. Na taj način ostvarena je standardna geometrija Holove trake (slika 3.1). Promenom ulaznog napona V_g , primenjenog na silicijumsku podlogu omogućeno je podešavanje gustine nosilaca u uzorku grafena, a samim tim i kontrola energije Fermijevog nivoa. Na slici 3.2a prikazana je zavisost R_{xx} od ulaznog napona V_g napona u nultom magnetnom polju. Pri visokim koncentracijama nosilaca R_{xx} je $\sim 100 \Omega$, dok se pri vrednostima $V_g \approx 0$ uočava oštar pik veličine $\sim 4 k\Omega$. Kod različitih uzoraka veličina i pozicija pika se neznatno menjaju, ali se uočava isti efekat. Postojanje takvog oštrog pika je u skladu sa smanjivanjem gustine nosilaca kako se E_F približava Dirakovoj tački u grafenu u kojoj gustina stanja iščezava. Na taj način se može na osnovu pozicije pika odrediti napon koji odgovara Dirakovoj tački neutralnosti, V_{Dirac} . Nezavisno se može meriti gustina nosilaca u uzorku grafena n i odrediti njihova pokretljivost μ koristeći jednostavan Drudev model. Rezultati ovih merenja su prikazani na slici 3.2b. Uočljiva



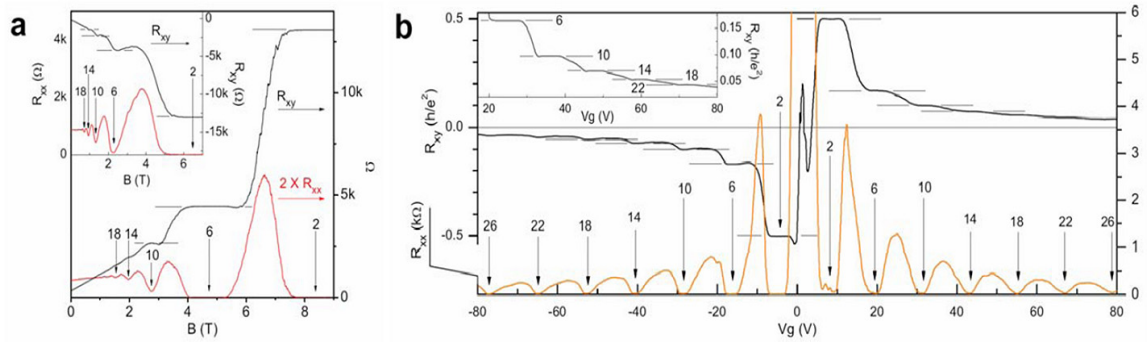
Slika 3.2: Otpor, gustina nosilaca i njihova pokretljivost mereni na 1.7 K za različite ulazne napone. **a**, Otpor uzorka kao funkcija ulaznog napna. Pozicija pikova otpora se menja u zavisnosti od uređaja, ali su vrednosti pika uvek $\sim 4k\Omega$, što ukazuje na moguće kvantno poreklo. **b**, Gustina nosilaca u grafenu (prazni kružići) i njihova pokretljivost (puni kružići) kao funkcija ulaznog napona. Puna linija odgovara procenjenom naelektrisanju indukovanom naponom, $n = C_g V_g / e$, koristeći ulaznu kapacitivnost $C_g = 115aF/\mu m^2$ iz geometrijskih razmatranja.

je promena znaka n za $V_g = V_{Dirac}$ što ukazuje da E_F zaista prolazi kroz tačku neutralnosti. Pokretljivost nosilaca je veća od $10^4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ u celom opsegu primenjenog napona što ukazuje na visoki kvalitet dobijenih uzoraka grafena.

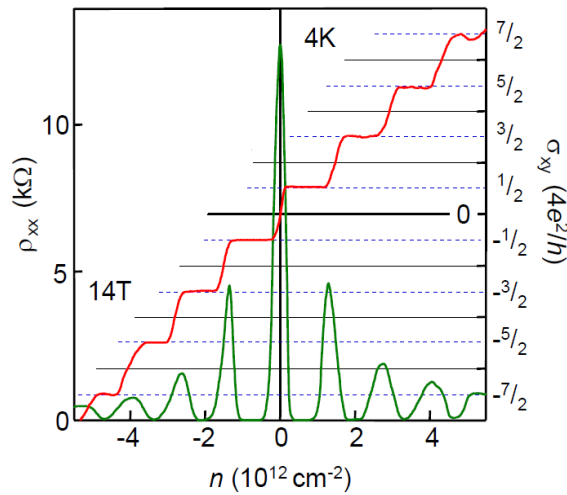
Izuzetno visoka pokretljivost nosilaca u grafenu omogućava ispitivanje transportnih pojava u ekstremnim uslovima svojstvenim kvantnom Holovom efektu. Slika 3.3a prikazuje R_{xy} i R_{xx} kao funkcije magnetnog polja B pri stalnom $V_g > V_{Dirac}$. Pozitivnost R_{xy} ukazuje da glavni doprinos potiče od elektrona. Pri jakim magnetnim poljima na zavisnosti $R_{xy}(B)$ se uočavaju platoi i R_{xx} iščezava, što je obeležje kvantnog Holovog efekta. Uočavaju se dva dobro definisana platoa sa vrednostima $(2e^2/h)^{-1}$ i $(6e^2/h)^{-1}$, praćena nepotpunim platoom $(10e^2/h)^{-1}$. Pri slabijim magnetnim poljima se prelazi u režim koji odgovara Šubnikov de Hazovim oscilacijama. Kvantizacija R_{xy} za prva dva platoa je bolja od 10^{-4} i tačna je u granicama eksperimentalne preciznosti. Takođe su uočene i odgovarajuće pojave za šupljinske nosioce ($V_g < V_{Dirac}$) sa negativnim vrednostima R_{xy} (slika 3.3a umetak). Alternativno, kvantni Holov efekat i za elektrone i za šupljine se može ispitivati fiksiranjem magnetnog polja i menjanjem V_g preko Dirakove tačke. U ovom slučaju, kako se V_g povećava, prvo šupljine ($V_g < V_{Dirac}$) pa zatim i elektroni ($V_g > V_{Dirac}$) popunjavaju uzastopne Landauove nivoe i javlja se KHE. Na taj način se dobija antisimetrična (simetrična) zavisnost R_{xy} (R_{xx}) na slici 3.3b. Kvantizacija R_{xy} je u skladu sa:

$$R_{xy}^{-1} = \pm 4(N + 1/2)e^2/h, \quad (3.1)$$

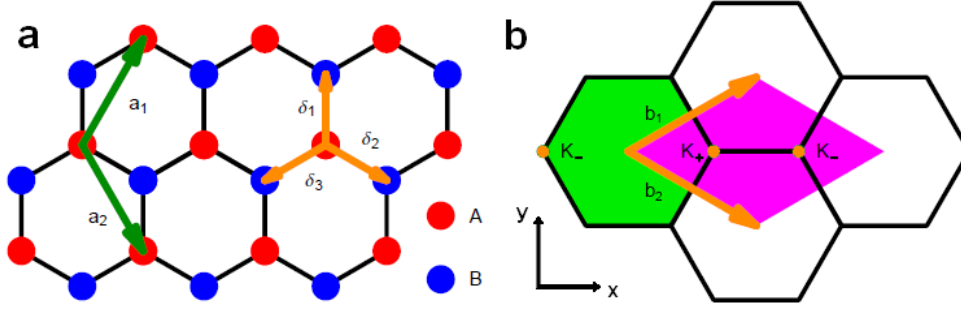
gde je N nenegativan ceo broj, dok znak $+$ odgovara elektronima, a znak $-$ šupljinama. Faktor 4 u prethodnom izrazu dolazi usled degeneracije po spinu i podrešetki u kristalu grafena. Prevedeno na ustaljenu terminologiju, takav kvantizacioni uslov odgovara popunjenosti Landauovih nivoa $\nu = \pm 4(N + 1/2)$. Prvi plato se pojavljuje na $2e^2/h$ i za prelaz sa najnižeg šupljinskog ($\nu = -2$) na najniži elektronski ($\nu = +2$) Landauov nivo je potreban isti broj nosilaca ($\Delta n = 4eB/h \approx 1.2 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$) kao i za prelaze među drugim najbližim nivoima. To rezultuje niz podjednako udaljenih platoa u zavisnosti σ_{xy} od gustine nosilaca koji nije prekinut prolaskom



Slika 3.3: Kvantovana longitudinalna otpornost i Holova otpornost uzorka grafena. **a**, Holova otpornost (crno) i longitudinalna otpornost (crveno) mereno na $T = 30\text{mK}$ i $V_g = 15\text{V}$. Vertikalne strelice i brojevi na njima pokazuju vrednosti B i odgovarajuće popunjenosti ν kvantnih Holovih stanja. Horizontalne linije odgovaraju $\nu h/e^2$ vrednostima. Umetak prikazuje KHE za šupljine na $V_g = -4\text{V}$, mereno na 1.6K . **b**, Holov otpor (crno) i longitudinalni otpor (narandžasto) kao funkcija ulaznog napona pri fiksnom magnetnom polju $B = 9\text{T}$, mereno na 1.6K . Umetak prikazuje detaljan izgled platoa sa visokim popunjenostima mereno na 30mK .



Slika 3.4: Holova provodnost σ_{xy} (crvena linija) i longitudinalna otpornost ρ_{xx} grafena (zelena linija) kao funkcija gustine nosilaca na $B = 14\text{T}$. σ_{xy} je izračunato iz merenih zavisnosti $\rho_{xy}(V_g)$ i $\rho_{xx}(V_g)$ kao $\sigma_{xy} = \rho_{xy}/(\rho_{xy} + \rho_{xx})^2$. Ponašanje $1/\rho_{xy}$ je slično, ali pokazuje diskontinuitet na $V_g \approx 0$, koji je izbegnut crtanjem σ_{xy} .



Slika 3.5: **a**, Šestougaona rešetka grafena dobijena kao superpozicija dve trougaone podrešetke A i B, sa bazisnim vektorima \mathbf{a}_i , $i = 1, 2$ za podrešetku A i vektorima δ_i , $i = 1, 2, 3$ koji povezuju A sa B. **b**, Zeleni šestougao je simetrična, a roze romb pomerena Brillouenova zona šestougaone rešetke. Vektori recipročne rešetke su \mathbf{b}_i , $i = 1, 2$.

kroz nulu što se može videti na slici 3.4. Ovakva neuobičajena polucelobrojna kvantizacija je posledica posebne elektronske strukture grafena koja će biti razmotrena u narednom odeljku.

3.2 Elektronska struktura grafena

3.2.1 Model jake veze

Šestougaona rešetka grafena nije Bravaisova već se može opisati preko dve trougaone podrešetke A i B (slika 3.5a) ili, ekvivalentno, preko jedne trougaone rešetke čiji bazis čini par susednih atoma tipa A i tipa B. Usled toga jedinični ćelija sadrži dva atoma, jedan tipa A i jedan tipa B. Vektori $\mathbf{a}_1 = a(1/2, \sqrt{3}/2)$ i $\mathbf{a}_2 = a(1/2, -\sqrt{3}/2)$ prikazani na slici 3.5a su vektori primitivnih translacija rešetke, gde je $a = |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = \sqrt{3}a_{CC}$ konstanta podrešetke i $a_{CC} = 1.42\text{Å}$ rastojanje između dva najbliža atoma ugljenika. Odgovarajući vektori recipročne rešetke su $\mathbf{b}_1 = 2\pi/a(1, 1/\sqrt{3})$ i $\mathbf{b}_2 = 2\pi/a(1, -1/\sqrt{3})$ i za njih važi $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Oni su prikazani na slici 3.5b zajedno sa simetričnom i pomenom Brillouenovom zonom. Temena simetrične Brillouenove zone nazivaju se \mathbf{K} tačkama i njihove koordinate su $\pm 2\pi/a(1/3, 1/\sqrt{3})$, $\pm 2\pi/a(1/3, -1/\sqrt{3})$ i $\pm 2\pi/a(2/3, 0)$. Samo dve \mathbf{K} tačke su neekvivalentne i uzećemo da su to $\mathbf{K}_{\pm} = \pm 2\pi/a(2/3, 0)$ tako da pripadaju pomerenoj Brillouenovoj zoni. Svaki atom tipa A na mestu $\mathbf{n} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$, povezan je sa najbližim atomima tipa B vektorima $\delta_1 = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)/3$, $\delta_2 = (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)/3$, $\delta_3 = (-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)/3$ koji su takođe prikazani na slici 3.5a. Atomi ugljenika u ravni grafena povezani su jakim kovalentnim σ -vezama koje se dobijaju sp^2 hibridizacijom atomskih $2s$, $2p_x$ i $2p_y$ orbitala. Preostale atomske $2p_z$ orbitale su normalne na ravan grafena, slabo se preklapaju i odgovorne su za formiranje π veza. Ta činjenica omogućava uspešnu primenu modela jake veze za nalaženje elektronske strukture grafena. Hamiltonijan koji odgovara najjednostavnijem opisu π orbitala u kojem se zanemaruje preklapanje atomskih $2p_z$ orbitala i uzima u obzir efekat izmene samo između najbližih atoma ugljenika dat je izrazom:

$$\mathcal{H}_0 = -t \sum_{\mathbf{n}, s} \sum_{\delta_i} (a_{\mathbf{n}, s}^\dagger b_{\mathbf{n} + \delta_i, s} + b_{\mathbf{n} + \delta_i, s}^\dagger a_{\mathbf{n}, s}), \quad (3.2)$$

gde su $a_{\mathbf{n},s}$ i $b_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\delta}_i,s}$ Fermi operatori za elektrone spina $s = \uparrow, \downarrow$ na mestima \mathbf{n} i $\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i$ u podreškama A i B , respektivno. Parametar t predstavlja energiju izmene između najbližih atoma ugljenika i u grafenu iznosi $\approx 2.8\text{eV}$. Radi jednostavnosti razmatra se čisto dvodimenzioni model. Eksperiment pokazuje da se atomi ugljenika izmeštaju izvan ravni tj. pojavljuje se lokalna zakrivljenost površine ukoliko grafen postoji bez podloge npr. u obliku lebdeće membrane. To otvara interesantnu mogućnost proučavanja kvantne elektrodinamike u zakrivljenom prostoru. Koristeći Furiije-razvoje Fermi operatora $a_{\mathbf{n},s} = \sqrt{S} \int_{BZ} d^2\mathbf{k}/(2\pi)^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}} a_s(\mathbf{k})$ (i analogno za $b_{\mathbf{n},s}$), gde je $S = a^2\sqrt{3}/2$ površina Brillouene zone (BZ), dobija se hamiltonijan u impulsnoj reprezentaciji:

$$\mathcal{H}_0 = -t \sum_s \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} (S(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k})b_s(\mathbf{k}) + S^*(\mathbf{k})b_s^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})), \quad (3.3)$$

gde $S(\mathbf{k})$ predstavlja geometrijski strukturalni faktor $S(\mathbf{k}) = \sum_{\boldsymbol{\delta}_i} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\delta}_i} = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)/3} (1 + e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}_2} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}_1})$. Uvođenjem spinora $\psi_s(\mathbf{k}) = (a_s(\mathbf{k}), b_s(\mathbf{k}))$, hamiltonijan dobija oblik:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_s \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \psi_s^\dagger(\mathbf{k}) H_0(\mathbf{k}) \psi_s(\mathbf{k}), \quad H_0(\mathbf{k}) = -t \begin{pmatrix} 0 & S(\mathbf{k}) \\ S^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

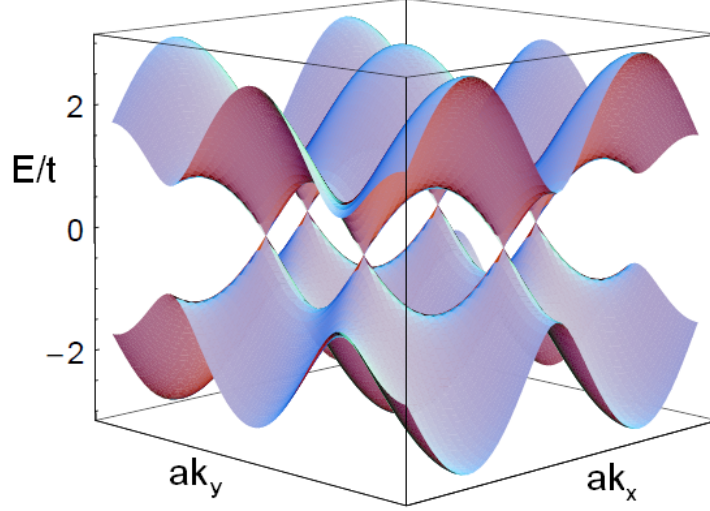
gde je $H_0(\mathbf{k})$ gustina hamiltonijana u \mathbf{k} -prostoru. Svojevredne vrednosti $H_0(\mathbf{k})$ predstavljaju energijske grane odn. trake $E_\pm(\mathbf{k}) = \pm\epsilon(\mathbf{k})$, gde je uvedena oznaka $\epsilon(\mathbf{k}) = t|S(\mathbf{k})|$. Grana $E_+(\mathbf{k})$ je provodna, a $E_-(\mathbf{k})$ valentna. Izračunavanjem se dobija sledeći izraz:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = t\sqrt{1 + 4\cos^2(k_x a/2) + 4\cos(k_x a/2)\cos(\sqrt{3}k_y a/2)}. \quad (3.5)$$

Energijske grane su prikazane na slici 3.6. Pošto jedinična ćelija sadrži dva atoma ugljenika od kojih svaki daje po jedan elektron, postoje dva elektrona po jediničnoj ćeliji. Budući da ne uzimamo u obzir spin-orbita interakciju svako stanje je dvostruko degenerisano pa je u neutralnom grafenu valentna traka potpuno popunjena, a provodna potpuno prazna. Strukturalni faktor $S(\mathbf{k})$ postaje jednak nuli u \mathbf{K} tačkama, dok je u okolini \mathbf{K}_\pm tačaka njegova približna vrednost

$$S(\mathbf{K}_\pm + \mathbf{k}) \approx \pm a\sqrt{3}/2(k_x \mp ik_y). \quad (3.6)$$

Zaključuje se da se valentna i provodna traka dodiruju u temenima simetrične Brillouene zone. Sledi da je grafen poluprovodnik sa nultim energijskim procepom ili, ekvivalentno, polumetal čija se valentna i provodna traka ne preklapaju. U okolini \mathbf{K} tačaka niskoenergijske ekscitacije imaju linearnu disperziju $\epsilon(\mathbf{k}) \approx \hbar v_F |\mathbf{k}|$, gde je $v_F = \sqrt{3}ta/(2\hbar)$ Fermijeva brzina, a $\hbar\mathbf{k}$ impuls ekscitacija meren u odnosu na odgovarajuću \mathbf{K} tačku. Zapravo, ovakav karakter ekscitacija sledi iz same simetrije rešetke grafena, pa je stoga održan i kada se uzmu u obzir i interakcije daljih suseda. Ova činjenica opravdava korišćenje najjednostavnijeg modela jake veze za opis ekscitacija niske energije. Iz rečenog proizilazi da elektroni u grafenu imaju nultu efektivnu masu kao i da je njihova srednja brzina nezavisna od impulsa i jednaka v_F . Stoga se oni ponašaju pre kao fotoni (sa "brzinom svetlosti" v_F) nego kao masivne čestice kvadratne disperzije, uobičajene u fizici kondenzovane materije. Iz dosada izloženog prirodno se nameće ideja da su ekscitacije niske energije u grafenu opisane pre Dirakovom nego Šredingerovom jednačinom. Ispostavlja se da je zaista tako.



Slika 3.6: Elektronske trake u grafenu. Provodna i valentna traka se dodiruju u šest \mathbf{K} tačaka od kojih su dve neekvivalentne. U okolinama \mathbf{K} tačaka grane su konusnog oblika.

3.2.2 KED_{2+1} opis grafena

Prilikom razmatranja niskoenergijskih ekscitacija dovoljno je integraciju u izrazu za \mathcal{H}_0 u jednačini (3.4) izvršiti samo u pogodno izabranim okolinama \mathbf{K}_{\pm} tačaka i iskoristiti (3.6), te se na taj način dobija:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_s \int_{DC} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} (\psi_s^\dagger(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}) H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k}) \psi_s(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}) + \psi_s^\dagger(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}) H_{\mathbf{K}_-}(\mathbf{k}) \psi_s(\mathbf{K}_- + \mathbf{k})), \quad (3.7)$$

pri čemu su gustine hamiltonijana u \mathbf{K}_{\pm} tačkama (σ_x i σ_y su Paulijeve matrice):

$$H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k}) = \hbar v_F (\sigma_x k_x + \sigma_y k_y), \quad H_{\mathbf{K}_-}(\mathbf{k}) = \hbar v_F (-\sigma_x k_x + \sigma_y k_y). \quad (3.8)$$

Integracija u (3.7) se vrši po Dirakovom konusu (DC) sa graničnim talasnim vektorom κ izabranim tako da je broj stanja očuvan: $2 \times \kappa^2 \pi = \Omega_B \implies \kappa = \sqrt{\Omega_B/(2\pi)} = 1/a \sqrt{4\pi/\sqrt{3}} \approx 2.69/a$. Poređenja radi, stranica simetrične Brillouenove zone je dužine $4\pi/(3a) \approx 4.19/a$. Odgovarajuća granična energija je $W = \hbar v_F \sqrt{\Omega_B/(2\pi)} = \hbar v_F/a \sqrt{4\pi/\sqrt{3}} = t \sqrt{\pi\sqrt{3}} \approx 2.33t$, gde je $\Omega_B = (2\pi)^2/S$ površina Brillouenove zone.

Radi uočavanja sličnosti sa Dirakovom jednačinom pogodno je uvesti četvorokomponentni spinor $\Psi_s(\mathbf{k})$ sastavljen od dvokomponentnih spinora $\psi_s(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k})$ i $\psi_s(\mathbf{K}_- + \mathbf{k})$. Dodatno, treba zameniti mesta podrešetkama u spinoru koji odgovara \mathbf{K}_- tački čime se obezbeđuje da važi $H_{\mathbf{K}_{\pm}}(\mathbf{k}) = \pm \hbar v_F (\sigma_x k_x + \sigma_y k_y) = \pm \hbar v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$. Tako se konačno dobija najpogodniji oblik spinora:

$$\Psi_s(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} a_s(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}) \\ b_s(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}) \\ b_s(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}) \\ a_s(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

U ovakvom zapisu hamiltonijan (3.7) poprima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \hbar v_F \sum_s \int_{DC} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Psi_s^\dagger(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & k_x - ik_y & 0 & 0 \\ k_x + ik_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_x + ik_y \\ 0 & 0 & -k_x - ik_y & 0 \end{pmatrix} \Psi_s(\mathbf{k}) \\ &= \hbar v_F \sum_s \int_{DC} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Psi_s^\dagger(\mathbf{k}) H_0(\mathbf{k}) \Psi_s(\mathbf{k}), \quad H_0(\mathbf{k}) = \hbar v_F (\alpha^1 k_x + \alpha^2 k_y) = \hbar v_F \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

$\alpha^{1,2}$ predstavljaju prve dve od tri α matrice poznate iz Dirakove teorije:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,\tag{3.11}$$

koje antikomutiraju međusobno i sa četvrtom matricom:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.12}$$

Koristeći matrice α^i i β konstruiše se tzv. Vejlova ili kiralna reprezentacija Dirakovih γ matrica:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,\tag{3.13}$$

pomoću kojih se dobija Dirakov hamiltonijan u obliku koji je zastupljen u KED:

$$\mathcal{H}_0 = \hbar v_F \sum_s \int_{DC} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \bar{\Psi}_s(\mathbf{k}) H_0^D(\mathbf{k}) \Psi_s(\mathbf{k}), \quad H_0^D(\mathbf{k}) = \hbar v_F (\gamma^1 k_x + \gamma^2 k_y) = \hbar v_F \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k},\tag{3.14}$$

pri čemu je uveden i Dirak-konjugovani spinor $\bar{\Psi}_s(\mathbf{k}) = \Psi_s^\dagger(\mathbf{k}) \gamma^0$. U KED se koristi i tzv. kiralna γ^5 matrica:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},\tag{3.15}$$

koja antikomutira sa svim γ matricama i komutira sa hamiltonijanom (3.10) i stoga odgovara očuvanoj veličini. Za talasne funkcije:

$$\Psi_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{K}_-}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}) \end{pmatrix},\tag{3.16}$$

koje odgovaraju ekscitacijama u \mathbf{K}_+ i \mathbf{K}_- tački, respektivno, važi: $\gamma^5 \Psi_{\mathbf{K}_\pm}(\mathbf{k}) = \pm \Psi_{\mathbf{K}_\pm}(\mathbf{k})$. Sledi da su prelazi između tačaka \mathbf{K}_+ i \mathbf{K}_- zabranjeni ukoliko nema dodatne interakcije koja bi to omogućila.

Hamiltonijan (3.14) koji daje niskoenergijski opis grafena odgovara KED₂₊₁ Dirakovom hamiltonijanu za bezmasene čestice. U (2+1)-dimenziji se, međutim, ne koristi γ^3 matrica pa u tom slučaju $\gamma^{0,1,2}$ ne čine ireducibilnu već reducibilnu reprezentaciju Dirakove algebre.

Ireducibilne reprezentacije Dirakove algebre u (2+1)-dimenziji date su 2×2 matricama i postoje dve neekvivalentne IR-e koje se razlikuju u znaku:

$$\hat{\gamma}^0 = \sigma_3, \quad \hat{\gamma}^1 = i\sigma_2, \quad \hat{\gamma}^2 = -i\sigma_1, \quad (3.17)$$

$$\check{\gamma}^0 = -\sigma_3, \quad \check{\gamma}^1 = -i\sigma_2, \quad \check{\gamma}^2 = i\sigma_1. \quad (3.18)$$

Četvorodimenziona reprezentacija $\gamma^{0,1,2}$ je ekvivalentna direktnom zbiru pomenutih IR-a. Transformacijom sličnosti reprezentacije (3.13) matricom:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & \sigma_3 \\ I_2 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ \sigma_3 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

dobija se reprezentacija kod koje su $\gamma^{0,1,2}$ u razloženom obliku:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^0 & 0 \\ 0 & \check{\gamma}^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^1 & 0 \\ 0 & \check{\gamma}^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & \check{\gamma}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Reducibilnost 4D reprezentacije $\gamma^{0,1,2}$ je posledica neophodnosti razmatranja ekscitacija u dvema neekvivalentnim tačkama \mathbf{K}_{\pm} . Pošto u tim ekscitacijama uzimaju učešće i elektroni sa A i elektroni sa B podrešetke za opis u svakoj \mathbf{K} tački mora se koristiti 2D reprezentacija. Usled toga pri razmatranju spektra hamiltonijana $H_0(\mathbf{k})$ moraju se uzeti u obzir obe \mathbf{K} tačke.

Linearnost spektra ekscitacija jeste važna osobenost grafena, ali nije jedino bitno svojstvo koje sleduje iz opisa kvantnog transporta u grafenu preko Dirakove jednačine. Pri pozitivnim energijama, nosioci struje u grafenu, kao i obično, nalikuju elektronima i negativno su naelektrisani. Na negativnim energijama, tj. ako valentna traka nije skroz popunjena, nezauzeta stanja se ponašaju kao pozitivno naelektrisane kvazičestice (šupljine), koje se često smatraju pozitronskim ekvivalentom u fizici kondenzovane materije. Treba primetiti da se elektroni i šupljine u fizici kondenzovane materije standardno opisuju zasebnim Šredingerovim jednačinama koje ni na koji način nisu u vezi i u kojima elektroni i šupljine imaju različite efektivne mase. Nasuprot tome, elektronska i šupljinska stanja u grafenu su međusobno povezana i među njima postoji simetrija analogna konjugaciji naboja u kvantnoj elektrodinamici. U slučaju grafena pomenuta simetrija je posledica njegove kristalne simetrije budući da kvazičestice u grafenu (u obema \mathbf{K}_{\pm} tačkama) moraju biti opisane dvekomponentnim talasnim funkcijama, što je neophodno da bi se uračunali doprinosi u njihovom sastavu obeju podrešetki A i B. Pomenuti dvekomponentni opis je veoma sličan spinorskim talasnim funkcijama u KED, ali je u grafenu "spin" u vezi sa podrešetkama, a ne sa pravim spinom elektrona i obično se naziva pseudospinom σ . Na taj način, podrešetki A odgovara pseudospinsko stanje $|\uparrow\rangle$, a podrešetki B stanje $|\downarrow\rangle$. Prema tome, u formalnom opisu ekscitacija odn. kvazičestica u grafenu hamiltonijanom koji je sličan Dirakovom, σ se odnosi na pseudospin dok efekti pravog spina moraju biti uračunati dodatnim članovima u hamiltonijanu. Pojave koje su osobene za KED su obično obrnuto srazmerne brzini svetlosti c , pa su u grafenu pojačane za faktor $c/v_F \approx 300$. To znači i da efekti povezani sa pseudospinom treba da budu preovlađujući u odnosu na spinske efekte.

Iz činjenice da su ekscitacije u \mathbf{K}_{\pm} tačkama opisane hamiltonijanom $H_{\mathbf{K}_{\pm}}(\mathbf{k}) = \pm \hbar v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$ sledi da za elektron/šupljinu iz \mathbf{K}_{\pm} tačke energije $\pm \hbar v_F k$ i impulsa $\hbar \mathbf{k}$ važi $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \psi_{e,h} =$

$\pm\psi_{e,h}$ pri čemu gornji znak odgovara elektronima, a donji šupljinama. Znači da je pseudospin elektrona paralelan, a šupljina antiparalelan impulsu. Situacija u \mathbf{K}_- tački je obrnuta. To omogućava uvođenje kiralnosti kao projekcije pseudospina na pravac kretanja i koja je $+1$ za elektrone i -1 za šupljine u \mathbf{K}_+ tački (i obrnuto u \mathbf{K}_- tački). To dodatno povlači da elektronu energije E i impulsa $\hbar\mathbf{k}$ odgovara pseudospin koji pokazuje u istom smeru kao i pseudospin šupljine energije $-E$ i impulsa $-\hbar\mathbf{k}$. Kako su talasne funkcije $\psi_e(\mathbf{k})$ i $\psi_h(-\mathbf{k})$ svojstvene za $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$ za istu svojstvenu vrednost mogu se razlikovati najviše do na fazni faktor. Sledi da u izgradnji elektronskih i šupljinskih ekscitacija suprotnih impulsa podrešetke učestvuju sa istim relativnim doprinosom. Stoga kiralnost u grafenu u suštini ukazuje na činjenicu da su stanja \mathbf{k} elektrona i $-\mathbf{k}$ šupljine međusobno povezana budući da podrešetke imaju isti udeo u njihovoj izgradnji. Koncepti pseudospina i kiralnosti su značajni zato što mnogi elektronski procesi u grafenu mogu biti shvaćeni kao posledica održanja tih veličina. Iako pokazuju sličnost sa odgovarajućim konceptima u KED_{3+1} , postoji i bitna razlika jer u slučaju grafena odgovaraju unutrašnjoj simetriji dok su u KED_{3+1} u vezi sa prostornom simetrijom.

3.3 Landauovi nivoi u grafenu

Elementarno objašnjenje kvantnog Holovog efekta može se dati na osnovu strukture Landauovih nivoa. Posmatrajmo jednosloj grafena u konstantnom normalnom magnetnom polju $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, $\partial A_y(x,y)/\partial x - \partial A_x(x,y)/\partial y = B > 0$, gde je $\mathbf{A}(x,y)$ vektorski potencijal. Hamiltonijan se u tom slučaju dobija iz (3.10) minimalnom smenom $\mathbf{k} \rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} + e/\hbar\mathbf{A}(i\partial/\partial\mathbf{k})$. Usled toga κ_x i κ_y ne komutiraju već važi: $[\kappa_x, \kappa_y] = -ieB/\hbar$. Korisno je uvesti operatore $\pi_- = \kappa_x - i\kappa_y$ i $\pi_+ = \kappa_x + i\kappa_y$ za koje važi:

$$[\pi_-, \pi_+] = 2eB/\hbar, \quad (\pi_-)^\dagger = \pi_+. \quad (3.22)$$

Iz prethodne komutacione relacije se može zaključiti da je π_+ analogan kreacionom, π_- anihilacionom operatoru, a $\pi_+\pi_-$ operatoru broja čestica. Hamiltonijan u magnetnom polju je tada:

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & H_{\mathbf{K}_-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad H_{\mathbf{K}_\pm}(\mathbf{k}) = \pm\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \pi_- \\ \pi_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Kao što je već rečeno, za određivanje spektra $H(\mathbf{k})$ potrebno je razmotriti obe \mathbf{K} tačke. Dovoljno je rešiti svojstveni problem hamiltonijana $H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k})$. Iz $H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k})\psi_E(\mathbf{k}) = E\psi_E(\mathbf{k})$ sledi $H_{\mathbf{K}_-}(\mathbf{k})\psi_E(\mathbf{k}) = -E\psi_E(\mathbf{k})$, pa za svojstvene funkcije:

$$\Psi_{\mathbf{K}_+,E}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \psi_E(\mathbf{k}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{K}_-,E}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{-E}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

važi $H(\mathbf{k})\Psi_{\mathbf{K}_\pm,E}(\mathbf{k}) = E\Psi_{\mathbf{K}_\pm,E}(\mathbf{k})$. Usled uzimanja u obzir dveju neekvivalentnih \mathbf{K} tačaka degeneracija nivoa energije E hamiltonijana $H(\mathbf{k})$ je dva puta veća od degeneracije nivoa energije E hamiltonijana $H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k})$.

Svojstveni problem za $H_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{k})$ je:

$$\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \pi_- \\ \pi_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

i ekvivalentan je jednačinama:

$$\pi_- \phi_2 = \varepsilon \phi_1, \quad \pi_+ \phi_1 = \varepsilon \phi_2, \quad (3.26)$$

gde je $\varepsilon = E/\hbar v_F$, iz kojih sledi:

$$\pi_- \pi_+ \phi_1 = \varepsilon^2 \phi_1, \quad \pi_+ \pi_- \phi_2 = \varepsilon^2 \phi_2. \quad (3.27)$$

Označimo sa $|n\rangle$ svojstvenu funkciju operatora $\pi_+ \pi_-$ za koju važi $\pi_+ \pi_- |n\rangle = 2neB/\hbar |n\rangle$, gde $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je $\pi_- |n\rangle = \sqrt{2eB/\hbar} \sqrt{n} |n-1\rangle$ i $\pi_+ |n\rangle = \sqrt{2eB/\hbar} \sqrt{n+1} |n+1\rangle$. Sistem jednačina (3.27) ima rešenja ukoliko je $\varepsilon^2 = 2neB/\hbar$ za neko $n \in \mathbb{N}_0$. Radi jednostavnosti, do kraja ovog odeljka energije će biti date u jedinicama $\hbar v_F$. Za $n > 0$ postoje dve moguće energije $+\varepsilon_n$ i $-\varepsilon_n$, gde je:

$$\varepsilon_n = \sqrt{2neB/\hbar}, \quad (3.28)$$

dok za $n = 0$ postoji samo jedna $\varepsilon_0 = 0$. Primećuje se da energija nivoa $n = 0$ ne zavisi od jačine magnetnog polja. Za $n > 0$ odgovarajuće svojstvene funkcije za energije $+\varepsilon_n$ i $-\varepsilon_n$ su, respektivno:

$$\psi_n^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |n-1\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix}, \quad \psi_n^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -|n-1\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

dok je za $n = 0$ svojstvena funkcija:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ |0\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Svojstvene funkcije 4×4 hamiltonijana $H(\mathbf{k})$ su prema (3.24):

$$\Psi_{\mathbf{K}_+,n}^+ = \begin{pmatrix} \psi_n^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{K}_-,n}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^- \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = +\varepsilon_n, \quad n > 0, \quad (3.31)$$

$$\Psi_{\mathbf{K}_+,n}^- = \begin{pmatrix} \psi_n^- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{K}_-,n}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^+ \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = -\varepsilon_n, \quad n > 0, \quad (3.32)$$

$$\Psi_{\mathbf{K}_+,0} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{K}_-,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0, \quad n = 0. \quad (3.33)$$

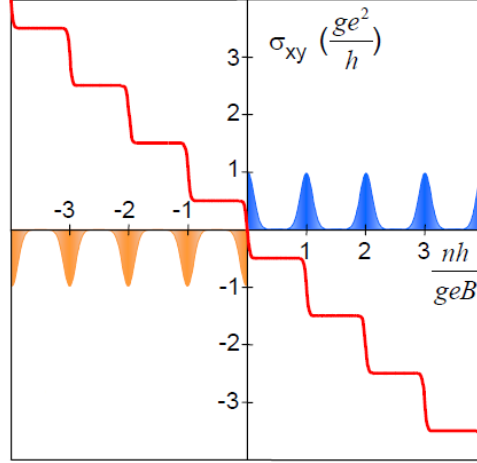
Usled postojanja dve neekvivalentne \mathbf{K} tačke degeneracija svakog nivoa je dva puta veća od standardne degeneracije eB/h (po jedinici površine, po spinu). Talasne funkcije (3.31) opisuju elektronske ekscitacije u tačkama \mathbf{K}_\pm , dok (3.32) opisuju šupljinske ekscitacije. Slučaj $n = 0$ zahteva detaljniju analizu.

Iz antikomutiranja matrice β sa matricama $a^{1,2}$ sledi:

$$\beta H(\mathbf{k}) \beta = -H(\mathbf{k}). \quad (3.34)$$

Dobijena relacija u našem slučaju ukazuje na elektron-šupljina simetriju spektra hamiltonijana $H(\mathbf{k})$. Naime, ako je Ψ svojstvena funkcija $H(\mathbf{k})$ za elektrone (šupljine), tada je $\beta \Psi$ svojstvena funkcija $H(\mathbf{k})$ za šupline (elektrone). Iz toga se zaključuje da (do na nebitni fazni faktor) važi $\beta \Psi_{\mathbf{K}_+,0} = \Psi_{\mathbf{K}_-,0}$ i $\beta \Psi_{\mathbf{K}_-,0} = \Psi_{\mathbf{K}_+,0}$, što zapravo znači da jedna od talasnih funkcija $\Psi_{\mathbf{K}_-,0}$ i $\Psi_{\mathbf{K}_+,0}$ odgovara elektronima, a druga šupljinama odn. da je Landauov nivo $n = 0$, $E = 0$ deljen između elektrona i šupljina.

Dobijeni zaključci omogućavaju jednostavno objašnjenje kvantizacije Holove provodnosti u jednosloju grafena. Kao što je poznato, Holova provodnost σ_{xy} ispoljava karakteristične plateau kada se E_F nađe između Landauovih nivoa i trpi skokove σ_{xy} za vrednost ge^2/h kada E_F prelazi



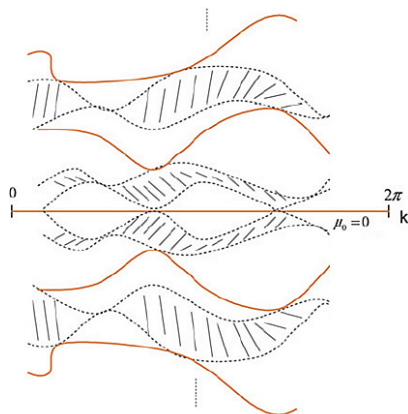
Slika 3.7: Shematski prikaz kvantnog Holovog efekta u jednoslojnom grafenu. g predstavlja dodatnu degeneraciju sistema (u našem slučaju je $g = 4$). Odgovarajući niz Landauovih nivoa kao funkcija koncentracije nosilaca n prikazan je plavo i narandžasto za elektrone i šupljine, respektivno.

Landauov nivo, gde je geB/h degeneracija tog nivoa. U slučaju grafena je $g = 4$. Pošto je u grafenu Landauov nivo sa energijom $E = 0$ uvek prisutan, nezavisno od jačine magnetnog polja, prelaskom E_F preko Dirakove tačke σ_{xy} trpi skok za vrednost $4e^2/h$. Usled elektron-šupljina simetrije σ_{xy} mora biti neparna funkcija energije. Zbog toga se prvi platoi za elektrone i šupljine pojavljuju na $\pm 2e^2/h$. Kako E_F prelazi preko sledećih Landauovih nivoa σ_{xy} se menja za $4e^2/h$ iz čega sledi kvantizacija data jednačinom (3.1) ($\sigma_{xy} = -R_{xy}^{-1}$ na platoima jer tada $R_{zz} \rightarrow 0$). Prethodno razmatranje ilustruje slika 3.7.

3.4 Objašnjenje KHE preko Berijeve faze

Objašnjenje KHE u grafenu može se dati razmatranjem Berijeve faze. Već je ukazano da izraz (2.36) formalno podseća na Berijevu fazu. Međutim, izračunavanje zasnovano na takvom izrazu je teško izvodljivo. Naime, moraju se koristiti složene linearne kombinacije talasnih funkcija Landauovih nivoa koje zadovoljavaju granične uslove (2.20), što je vrlo netrivialno. Na sreću, problemu se može pristupiti i na drugi način. Postojanje Landauovog nivoa na nultoj energiji je karakteristika grafena i upravo njegov doprinos daje neuobičajenu kvantizaciju. Zato je dovoljno izračunati doprinos nultog Landauovog nivoa što nam daje položaj prvog platoa.

Najopštije razmatranje KHE u grafenu postiže se razmatranjem modela jake veze u prisustvu konstantnog magnetnog polja čiji je fluks kroz šestougao rešetke $p/q \times \phi_0$, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi. Takvo razmatranje je primenljivo za proizvoljna magnetna polja i nema ograničenja u pogledu energije jer ne koristi niskoenergijsku aproksimaciju. Usled postojanja dvaju podrešetki u grafenu, spektar je simetričan u odnosu na nulu. Pokazuje se da dolazi do stvaranja $2q$ energijskih traka koje se javljaju u parovima suprotnih energija i $2q - 1$ ivičnih stanja između energijskih traka [12]. Energije $2(q - 1)$ ivičnih stanja zavise od talasnog broja i javljaju se u parovima suprotnog znaka. Zato uvek mora postojati ivično stanje nulte energije



Slika 3.8: Shematski prikaz traka i ivičnih stanja grafena u magnetnom polju. Ivična stanja su prikazana punim linijama dok su trake označene osenčenim površinama između isprekidanih linija.

koje upravo odgovara nultom Landauovom nivou.

Pomenuto nultoenergijsko ivično stanje nalazi se između prvih traka pozitivne i negativne energije koje se dodiruju tako da među njima nema procepa, pa samim tim ni doprinosa prvom Černovom broju. Zato nema platoa oko nulte energije. Za neku određenu vrednost q prvi platoi se javljaju kada hemijski potencijal leži u prvim procepima koji se nalaze između prvih i drugih traka pozitivne i negativne energije. Platoi su raspoređeni simetrično u odnosu na nulu, a skok među njima se javlja usled doprinosa Landauovog nivoa nulte energije. Holova provodnost zavisi od odnosa koncentracije nosilaca i jačine magnetnog polja n/B , pa usled toga ni prvi Černov broj neće zavistiti od q sve dok se hemijski potencijal nalazi u prvim procepima tokom promene magnetnog polja odn. fluksa. Zato možemo da svedemo njegovo izračunavanje na slučaj $q = 1$. To je zapravo slučaj celobrojnog fluksa kroz šestougao $p \times \phi_0$ (koji odgovara čistom gejdžu) i ceo račun za prvi plato se zato svodi na razmatranje problema bez magnetnog polja u prvoj Brilluenuvoj zoni. U slučaju grafena dovoljno je aproksimirati niskoenergijski spektar Dirakovim konusima jer upravo u njima leži singularnost i izvor Berijevog polja. Kod običnih poluprovodnika pomenuti postupak se svodi na to da hemijski potencijal držimo ispod prvog Landauovog nivoa i vršimo kontinuirani prelaz do slobodnog problema koji daje nulu Holove provodnosti tj. trivijalnu kvantizaciju kojoj odgovara plato umesto rasta koji dobijamo u grafenu oko nulte vrednosti odnosa n/B . Ponovo vidimo da je ključ za razumevanje KHE u grafenu postojanje Landauovog nivoa na nultoj energiji.

Kada nema magnetnog polja, operatori magnetnih translacija postaju obični operatori translacija. Zato kvantni brojevi k_x i k_y koji im odgovaraju imaju smisao koordinata talasnih vektora. Svojsvene talasne funkcije $\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r})$ elektronskih (+) i šupljinskih (–) ekscitacija u okolini \mathbf{K}_+ tačke (i obrnuto u okolini \mathbf{K}_-) koje zadovoljavaju granične uslove (2.20) date su izrazima:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi(\mathbf{k})} \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

gde je $k_x + ik_y = ke^{i\phi(\mathbf{k})}$. Posle ranije uvedene gejdž transformacije dobija se:

$$\tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi(\mathbf{k})} \\ \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Formula (2.24) za Holovu provodnost sadrži sumu po popunjenim stanjima. U našem slučaju su popunjena stanja šupljinska i u \mathbf{K}_{\pm} tački im odgovaraju talasne funkcije $\tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}$. Suma po popunjenim stanjima će biti zamenjena integralom po Dirakovom konusu pomnoženom sa površinom sistema $L_x L_y$:

$$(\sigma_{xy})_0 = \frac{ie^2}{\hbar} \int_{DC} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} (\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}}{\partial k_y} | \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}}{\partial k_x} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}}{\partial k_x} | \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}}{\partial k_y} \rangle). \quad (3.37)$$

Uvođenjem Berijevo vektorskog potencijala:

$$\mathcal{A}_B = -i \langle \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp} | \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}}{\partial \mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2k} \mathbf{e}_{\phi}, \quad (3.38)$$

dobijamo sledeći izraz za Holovu provodnost:

$$(\sigma_{xy})_0 = \frac{e^2}{2\pi h} \int_{DC} (\frac{\partial(\mathcal{A}_B)_y}{\partial k_x} - \frac{\partial(\mathcal{A}_B)_x}{\partial k_y}) dk_x dk_y = \frac{e^2}{2\pi h} \oint_{\partial DC} \mathcal{A}_B d\mathbf{k}, \quad (3.39)$$

gde se integracija u poslednjem integralu vrši po kružnici koja je obod Dirakovog konusa. Primećimo da vektorski potencijal ima singularitet u $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ kao i da je njegov rotor jednak nuli za $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. Ipak poslednji integral nije nula upravo zbog singulariteta u $\mathbf{k} = \mathbf{0}$:

$$\oint_{\partial DC} \mathcal{A}_B d\mathbf{k} = \pi. \quad (3.40)$$

Zaključujemo da je odgovarajuće Berijevo "magnetno" polje singularno $\mathcal{B} = \pi\delta(\mathbf{k})\mathbf{e}_z$. Dobijena konfiguracija odgovara beskonačno tankom solenoidu u $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ sa fluksom π . Koristeći dobijene rezultate dobijamo doprinos šupljina iz nultog Landauovog za svaku od \mathbf{K}_{\pm} tačaka:

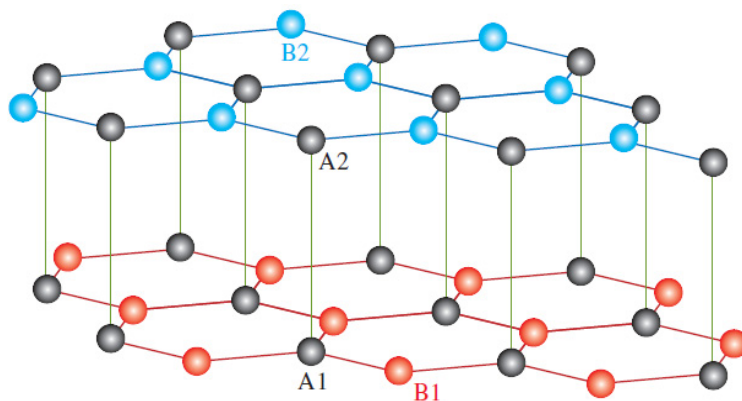
$$(\sigma_{xy})_0 = \frac{e^2}{2h}, \quad (3.41)$$

što upravo odgovara eksperimentalno uočenom pomeraju 1/2. Doprinos elektrona je isti.

Uloga Berijeve faze sakrivena je u izrazu (3.40). Naime, u Brilluenovoj zoni postoje dve neekvivalentne \mathbf{K}_{\pm} tačke u kojima hamiltonijan poseduje dvostruku degeneraciju i energijske grane imaju oblik konusa. Usled toga se u tačkama \mathbf{K}_{\pm} efektivno pojavljuju monopoli koji daju netrivialnu promenu faze kvazičestica koje, kvaziklasično gledano, u \mathbf{k} -prostoru opisuju kružne ciklotronske orbite oko tih tačaka. Kvazičestice u okolini \mathbf{K}_{\pm} opisane su hamiltonijanom $H_{\mathbf{K}_{\pm}}(\mathbf{k}) = \pm \hbar v_F \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, što je u saglasnosti sa opštim oblikom efektivnog 2×2 hamiltonijana u tački degeneracije (2.34) iz odeljka o Berijevoj fazi. Faza koju zadobiju čestice prilikom opisivanja kružne ciklotronske putanje oko $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ analogna je Aharonov-Bomovoj fazi, samo što u ovom slučaju imamo solenoid u \mathbf{k} -prostoru umesto u običnom. Za fermione koji opisuju ciklotronske orbite, Berijeva faza doprinosi semiklasičnoj kvantizaciji i utiče na fazu Šubnikov-de Hazovih oscilacija. U jednoslojnom grafenu rezultat je pomeraj od π u fazi Šubnikov-de Hazovih oscilacija i neuobičajeni niz KHE platoa koji su pomereni za 1/2 u poređenju sa standardnim poluprovodnicima u kojima je Berijeva faza jednaka nuli.

4 Dvoslojni grafen

Uzorci dvoslojnog grafena mogu se dobiti istom metodom kao i jednoslojni grafen. Kristalnu strukturu dvoslojnog grafena čine dve rešetke jednoslojnog grafena koje su međusobno povezane slabijim Van der Valsovim silama. Rastojanje među slojevima je 3.45\AA . Za opis dvosloja koriste se četiri Bravaisove trougaone podrešetke, u oznakama $A1$, $B1$ (donji sloj) i $A2$, $B2$ (gornji sloj) čiji raspored odgovara Bernalovom pakovanju. Naime, atomi iz $A2$ podrešetke nalaze se tačno iznad atoma iz $A1$ podršetke dok su atomi koji pripadaju $B2$ podrešetki smešteni direktno iznad centara šestouglova donjeg sloja, kao što je prikazano na slici 4.1. Jedinična ćelija sadrži četiri atoma $A1$, $B1$, $A2$, $B2$. Pakovanje ove vrste je uočeno u grafitu, a takođe i u dobijenim uzorcima dvoslojnog grafena.



Slika 4.1: Rešetka dvoslojnog grafena. Jedinična ćelija sadrži četiri atoma: $A1$, $B1$ iz donjeg sloja i $A2$, $B2$ iz gornjeg sloja.

4.1 Elektronska struktura dvoslojnog grafena

Za opis elektronske strukture koristi se aproksimacija jake veze kao i u slučaju jednoslojnog grafena. Novost predstavlja interakcija među atomima različitih slojeva. Ispostavlja se da to dovodi do potpuno drugačijih elektronskih osobina dvoslojnog u odnosu na jednoslojni grafen. Izmjena među atomima unutar sloja opisuje se, kao i kod jednog sloja, parametrom $t_{A1B1} = t_{A2B2} \equiv t$ kome odgovara brzina unutar sloja $v_F = (\sqrt{3}/2)ta/\hbar$, pri čemu je a konstanta trougaonih podrešetki. Interakcija između slojeva uključuje se u model kroz efekat izmene među parovima $2p_z$ orbitala koje pripadaju atomima $A1$ i $A2$ na istoj vertikali, što se postiže parametrom $t_{A1A2} \equiv t_{\perp}$. Posledica interakcije među slojevima je stvaranje dimera od pomenutih parova orbitala i formiranje visokoenergijskih grana. Poznate su vrednosti ovih energija izmene u slučaju grafita $t \approx 3\text{ eV}$ i $t_{\perp} \approx 0.35\text{ eV}$ i za očekivati je da se ne razlikuju bitno i u dvoslojnom grafenu. Ovakav model predstavlja minimalni model dvosloja. Moguće je uključiti i druge efekte izmene, ali oni dovode samo do finijih popravki i ne menjaju prirodu zaključaka koji se mogu izvesti iz minimalnog modela.

Hamiltonijan koji odgovara pomenutom modelu je:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= -t \sum_{\mathbf{n}, \sigma} \sum_{\delta_i} (a_{1, \mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{1, \mathbf{n} + \delta_i, \sigma} + a_{2, \mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{2, \mathbf{n} - \delta_i, \sigma} + H.c.) \\
&+ t_\perp \sum_{\mathbf{n}, \sigma} (a_{1, \mathbf{n}, \sigma}^\dagger a_{2, \mathbf{n}, \sigma} + H.c.) + \frac{\Delta}{2} \sum_{\mathbf{n}, \sigma} (a_{1, \mathbf{n}, \sigma}^\dagger a_{1, \mathbf{n}, \sigma} + b_{1, \mathbf{n} + \delta_i, \sigma}^\dagger b_{1, \mathbf{n} + \delta_i, \sigma}) \\
&- \frac{\Delta}{2} \sum_{\mathbf{n}, \sigma} (a_{2, \mathbf{n}, \sigma}^\dagger a_{2, \mathbf{n}, \sigma} + b_{2, \mathbf{n} - \delta_i, \sigma}^\dagger b_{2, \mathbf{n} - \delta_i, \sigma}). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Parametrom Δ koji predstavlja razliku $\epsilon_1 - \epsilon_2$ energija atoma u dva sloja, $\epsilon_1 = \Delta/2$ i $\epsilon_2 = -\Delta/2$, uvedena je mogućnost asimetrije između slojeva. Pomenuta asimetrija može se postići, recimo, uključivanjem električnog polja normalno na slojeve. Operatori $a_{1, \mathbf{n}, \sigma}$, $b_{1, \mathbf{n} + \delta_i, \sigma}$ su Fermi operatori za elektrone spina $\sigma = \uparrow, \downarrow$ u donjem sloju na podrešetkama A i B , dok su $a_{2, \mathbf{n}, \sigma}$, $b_{2, \mathbf{n} - \delta_i, \sigma}$ analogni operatori za elektrone u gornjem sloju. Koristeći Furije-razvoje Fermi operatora, kao i ranije, dobija se hamiltonijan u impulsnoj reprezentaciji:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \{ -t [S(\mathbf{k}) a_{1, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) b_{1, \sigma}(\mathbf{k}) + S^*(\mathbf{k}) a_{2, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) b_{2, \sigma}(\mathbf{k}) + H.c.] \\
&+ t_\perp [a_{1, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) a_{2, \sigma}(\mathbf{k}) + H.c.] + \frac{\Delta}{2} [a_{1, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) a_{1, \sigma}(\mathbf{k}) + b_{1, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) b_{1, \sigma}(\mathbf{k})] \\
&- \frac{\Delta}{2} [a_{2, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) a_{2, \sigma}(\mathbf{k}) + b_{2, \sigma}^\dagger(\mathbf{k}) b_{2, \sigma}(\mathbf{k})] \}. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

gde je $S(\mathbf{k})$ ranije uvedeni geometrijski strukturni faktor. Uvođenjem spinora

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{k}) = (a_{1, \sigma}(\mathbf{k}), a_{2, \sigma}(\mathbf{k}), b_{2, \sigma}(\mathbf{k}), b_{1, \sigma}(\mathbf{k}))^T \tag{4.3}$$

dobijamo hamiltonijan u matičnom obliku:

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \Delta/2 & t_\perp & 0 & -tS(\mathbf{k}) \\ t_\perp & -\Delta/2 & -tS^*(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & -tS(\mathbf{k}) & -\Delta/2 & 0 \\ -tS^*(\mathbf{k}) & 0 & 0 & \Delta/2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

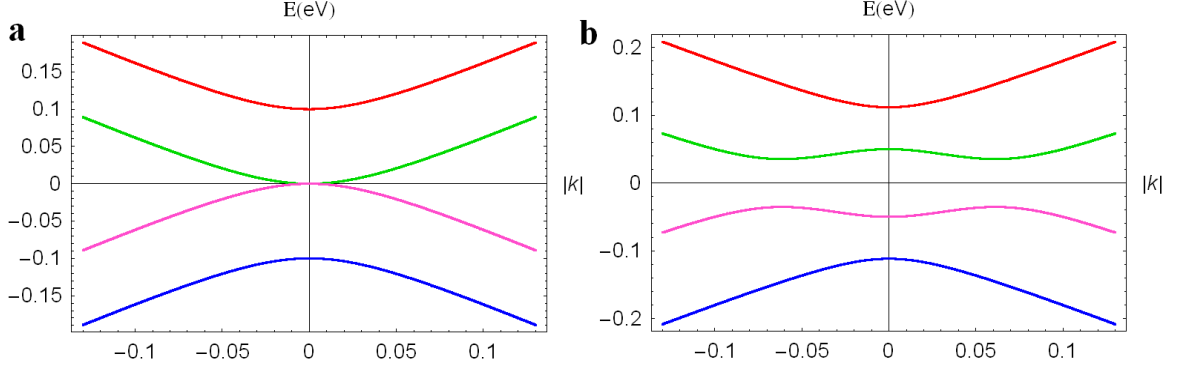
Rešavanjem svojstvenog problema $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ dobijaju se četiri energijske grane $E_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k})$, $\alpha = 1, 2$, gde je

$$E_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{\Delta^2}{4} + t^2 |S(\mathbf{k})|^2 + \frac{t_\perp^2}{2} + (-1)^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{t_\perp^2}{2}\right)^2 + t^2 |S(\mathbf{k})|^2 (\Delta^2 + t_\perp^2)}. \tag{4.5}$$

$E_1^{\pm}(\mathbf{k})$ su grane niže energije, dok su $E_2^{\pm}(\mathbf{k})$ visokoenergijske grane ($|E_2^{\pm}(\mathbf{k})| \geq t_\perp$) koje odgovaraju "dimeru" $A1A2$ i rezultat su interakcije među slojevima. Prikaz grana je dat na slici 4.2.

U slučaju simetričnog dvosloja ($\Delta = 0$) izrazi za grane dobijaju prostiji oblik:

$$E_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) = \pm((-1)^{\alpha} \frac{t_\perp}{2} + \sqrt{\frac{t_\perp^2}{4} + t^2 |S(\mathbf{k})|^2}). \tag{4.6}$$



Slika 4.2: Energijske grane simetričnog ($\Delta = 0$) (a) i asimetričnog (b) dvoslojnog grafena.

U okolini \mathbf{K} tačaka važi $t|S(\mathbf{K}_{\pm} + \mathbf{k})| \approx \hbar v_F k$, pa dobijamo:

$$E_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{p}) = \pm((-1)^{\alpha} m^* v_F^2 + \sqrt{(m^* v_F^2)^2 + p^2 v_F^2}), \quad (4.7)$$

gde je $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ impuls kvazičestica, a $m^* = t_{\perp}/(2v_F^2) \approx 0.05m_e$ njihova efektivna masa. Masa kvazičestica generisana je interakcijom među slojevima. Ukoliko nema takve interakcije odn. ako imamo dva nezavisna sloja, dobijaju se bezmasene kvazičestice linearne disperzije karakteristične za jednosloj. Prvi član u (4.7) zato odgovara doprinosu interakcije među slojevima, dok drugi odgovara interakciji unutar pojedinačnog sloja. Vidimo da su kvazičestice unutar slojeva masene i relativističke sa "brzinom svetlosti" v_F .

Može se uočiti da se niskoenergijske grane dodiruju u \mathbf{K} tačkama, tj. da je simetrični dvosloj poluprovodnik bez procepa, kao što je i jednoslojni grafen. Uvođenje asimetrije otvara energijski procep. Time je stvorena mogućnost kontrolisanja veličine procepa spoljašnjim električnim poljem. Dvoslojni grafen je jedini materijal čija se elektronska struktura tako bitno menja primenom električnog polja. Stoga je za očekivati da će biti veoma pogodan za primenu u elektronici naradne generacije.

Za niske energije dobija se sledeća približna disperziona relacija:

$$E_{1}^{\pm}(\mathbf{K}_{\pm} + \mathbf{k}) \cong \pm \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (4.8)$$

Dobijena kvadratna zavisnost energije od talasnog vektora ukazuje na bitno drugačiju prirodu ekscitacija u simetričnom dvoslojnom grafenu u odnosu na jednoslojni. Na osnovu energijskog spektra može se pomisliti da se ekscitacije ponašaju kao "klasične" masene čestice. Međutim, pokazuje se da su i u ovom slučaju kvazičestice kiralne, tj. da se mogu opisati hamiltonijanom koji kombinuje vandijagonalnu strukturu Dirakovog hamiltonijana sa članovima $\hat{p}^2/(2m^*)$ koji su svojstveni Šredingerovim česticama.

Kao i u slučaju jednoslojnog grafena radićemo u kontinualnoj aproksimaciji. Hamiltonijan u okolini \mathbf{K} tačaka ima sledeći oblik:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{K}_{\xi}}^0(\mathbf{k}) = \xi \begin{pmatrix} \Delta/2 & \xi t_{\perp} & 0 & \hbar v_F k_{-} \\ \xi t_{\perp} & -\Delta/2 & \hbar v_F k_{+} & 0 \\ 0 & \hbar v_F k_{-} & -\Delta/2 & 0 \\ \hbar v_F k_{+} & 0 & 0 & \Delta/2 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

pri čemu su uvedene oznake $k_+ = k_x + ik_y$, $k_- = k_x - ik_y$. $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_+}^0(\mathbf{k})$ je zapisan u spinorskom bazisu

$$\Psi_{\mathbf{K}_+, \sigma}(\mathbf{k}) = (a_{1, \sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}), a_{2, \sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}), b_{2, \sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}), b_{1, \sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{k}))^T \quad (4.10)$$

dok je za $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_-}^0(\mathbf{k})$ odgovarajući bazis dat spinorima

$$\Psi_{\mathbf{K}_-, \sigma}(\mathbf{k}) = (a_{2, \sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}), a_{1, \sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}), b_{1, \sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}), b_{2, \sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{k}))^T. \quad (4.11)$$

Hamiltonijan $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_\xi}^0(\mathbf{k})$ sadrži informaciju o visokoenergijskim granama E_2^\pm , te je nepodesan za analizu transportnih osobina dvosloja koje zavise od nosilaca iz niskoenergijskih grana E_1^\pm . Zato je potrebno naći niskoenergijski efektivni hamiltonijan koji će sadržati samo informaciju o granama E_1^\pm . U tom cilju napisaćemo $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_\xi}^0(\mathbf{k})$ u obliku 2×2 blokova:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{K}_\xi}^0(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

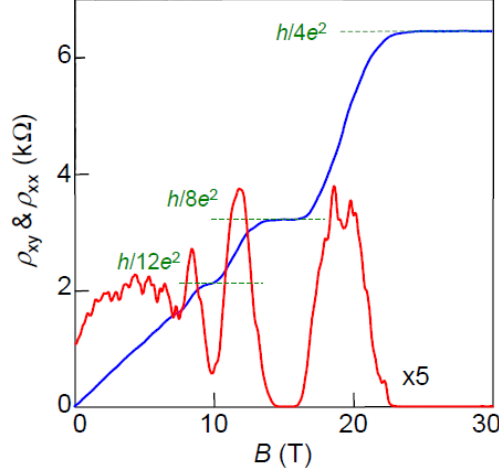
gde je $H_{11} = t_\perp \sigma_x + \xi \frac{\Delta}{2} \sigma_z$, $H_{12} = H_{21} = \xi \hbar v_F (k_x \sigma_x + k_y \sigma_y)$ i $H_{22} = -\xi \frac{\Delta}{2} \sigma_z$. Blok H_{22} je u vezi sa niskoenergijskim granama, H_{11} sa visokoenergijskim, a H_{12} i H_{21} povezuju visoko i niskoenergijske grane. Svojtveni problem za $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_\xi}(\mathbf{k})$ se može zapisati u obliku:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} H_{11} \Psi_1 + H_{12} \Psi_2 = E \Psi_1 \\ H_{21} \Psi_1 + H_{22} \Psi_2 = E \Psi_2 \end{matrix}. \quad (4.13)$$

Iz prve od jednačina sledi $\Psi_1 = -(H_{11} - E)^{-1} H_{12} \Psi_2$, pa zamenom u drugu dobijamo $(H_{22} - H_{21}(H_{11} - E)^{-1} H_{12}) \Psi_2 = E \Psi_2$ odakle je $H_{eff}(E) = H_{22} - H_{21}(H_{11} - E)^{-1} H_{12}$. Ukoliko posmatramo niskoenergijski slučaj tada je $(H_{11} - E)^{-1} \approx H_{11}^{-1}$, pa je niskoenergijski efektivni hamiltonijan $H_{eff} = H_{22} - H_{21} H_{11}^{-1} H_{12}$. Smatrajući da je $|\Delta| \ll t_\perp$ dobija se:

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{K}_\xi}^{eff}(\mathbf{k}) &= -\xi \frac{\hbar^2 v_F^2}{t_\perp} \begin{pmatrix} 0 & (k_-)^2 \\ (k_+)^2 & 0 \end{pmatrix} + h_a, \\ h_a &= -\xi \frac{\Delta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar^2 v_F^2 \Delta}{t_\perp^2} \begin{pmatrix} k_- k_+ & 0 \\ 0 & -k_+ k_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Efektivni hamiltonijan za \mathbf{K}_ξ tačku $H_{\mathbf{K}_\xi}^{eff}(\mathbf{k})$ deluje u potprostoru obrazovanom talasnim funkcijama koje odgovaraju elektronima na podrešetkama $B1$ i $B2$ i primenljiv je u opsegu energija $|E| < t_\perp/4$. Prvi član u $H_{\mathbf{K}_\xi}^{eff}(\mathbf{k})$ odgovara procesu izmene između mesta $B1$ i $B2$ preko dimera $A1A2$. Takav proces uključuje izmenu unutar prvog sloja između mesta $B1$ i $A1$ (kojoj odgovara član $\hbar v_F k_+$ iz $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_+}^0(\mathbf{k})$) praćenu prelazom među slojevima sa $A1$ na $A2$ (kome odgovara član t_\perp) i na kraju izmenu unutar drugog sloja između mesta $A2$ i $B2$ (kojoj odgovara član $\hbar v_F k_+$). Na taj način se dobijaju vandijagonalni članovi $\hbar^2 (k_\pm)^2 / (2m^*)$ sa efektivnom masom $m^* = t_\perp / (2v_F^2)$ koja odražava energijsku cenu t_\perp prelaza putem dimernog stanja $A1A2$. Zbog toga kvazičestice u simetričnom dvosloju imaju kvadratnu disperziju $E_1^\pm(\mathbf{k}) = \pm \hbar^2 k^2 / (2m^*)$. Član h_a odražava asimetriju među slojevima i dovodi do otvaranja procepa veličine $\sim \Delta$.



Slika 4.3: Holove otpornosti ρ_{xy} i ρ_{xx} merene kao funkcija B pri nepromenjenim koncentracijama elektrona $n \approx 2.5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ dobijenim efektom električnog polja.

Da bi se bolje uvidela priroda kvazičestica u simetričnom dvosloju, napisaćemo hamiltonoijan $H_{\mathbf{K}_\xi}^{eff}(\mathbf{k})$ u obliku:

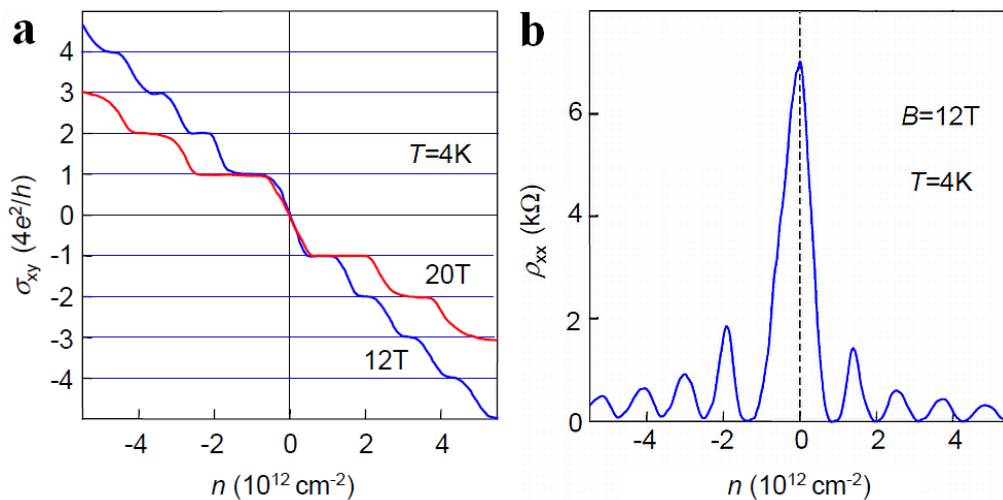
$$H_{\mathbf{K}_\xi}^{eff}(\mathbf{k}) = -\xi \frac{\hbar^2}{2m^*} [(k_x^2 - k_y^2)\sigma_x + 2k_x k_y \sigma_y] = -\xi \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{k} = k(\cos \phi_{\mathbf{k}}, \sin \phi_{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{n} = (\cos(2\phi_{\mathbf{k}}), \sin(2\phi_{\mathbf{k}})). \quad (4.16)$$

Kao i u slučaju jednoslojnog grafena uočava se da su kvazičestice kiralne. Za elektron/šupljinu energije $\pm \hbar^2 k^2 / (2m^*)$ iz \mathbf{K}_+ tačke važi $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \psi_{e,h} = \mp \psi_{e,h}$ pri čemu gornji znak odgovara elektronima, a donji šupljinama. Znači da je pseudospin elektrona antiparalelan, a šupljina paralelan vektoru \mathbf{n} . Odgovarajuće kvazičestice u \mathbf{K}_- tački imaju suprotnu kiralnost. Na taj način se u dvosloju grafena nailazi na sasvim novi i kontroverzni tip kvazičestica - na masene kiralne fermione. U KED kiralnost odgovara bezmasenim česticama, te se u jeziku KED izrazi "masene" i "kiralne" ne mogu odnositi na isti objekat. Stoga dvoslojni grafen nudi zanimljivu mogućnost ispitivanja masenih kiralnih fermiona kvadratne disperzije.

4.2 Kvantni Holov efekat u dvosloju

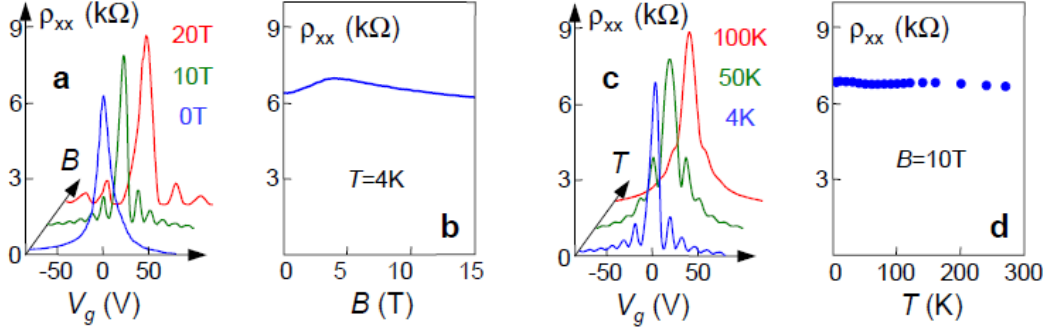
Uzorci dvoslojnog grafena na kojima je ispitivan kvantni Holov efekat dobijeni su od strane Novoselova i saradnika već pomenutim postupkom korišćenim za jedan sloj grafena. Promenom napona između grafena i silicijum-dioksidne podloge omogućeno je indukovanje koncentracija elektrona i šupljina n sve do 10^{13} cm^{-2} . Slika 4.3 prikazuje tipično KHE ponašanje u dvoslojnom grafenu pri nepromenjenom ulaznom naponu V_g (a samim tim i nepromenjenoj koncentraciji nosilaca n) u magnetnom polju B jačine sve do 30T. Platoi se jasno uočavaju u Holovoj otpornosti ρ_{xy} u jakim magnetnim poljima i praćeni su nultom longitudinalnom otpornošću ρ_{xx} . Dobijeni niz platoa opisan je jednačinom $\rho_{xy} = h/(4Ne^2)$, gde je N ceo broj različit od nule. To je isti niz koji se očekuje za dvodimenzioni sistem slobodnih fermiona uz četverostruku degeneraciju koja je prisutna u grafenu usled 2 vrednosti spina i 2 neekvivalentne \mathbf{K} tačke. Međutim, bitna



Slika 4.4: Holova provodnost σ_{xy} (a) i longitudinalna otpornost ρ_{xx} (b) kao funkcije koncentracije nosilaca n pri nepromenjenom B i na temperaturi $T = 4\text{K}$. Pozitivne vrednosti n odgovaraju elektronima, a negativne šupljinama. Holova provodnost $\sigma_{xy} = \rho_{xy}/(\rho_{xy}^2 + \rho_{xx}^2)$ je izračunata iz eksperimentalnih krivih za ρ_{xy} i ρ_{xx} . σ_{xy} prolazi nulu bez ikakve naznake platoa nultog nivoa koji bi bio očekivan u običnom 2D sistemu.

razlika između uobičajenog i dobijenog KHE ispoljava se u režimu malim popunjenostima $\nu < 1$. Ovakav režim se pogodno ispituje pri nepromenjenom B menjanjem koncentracija elektrona i šupljina i prolaskom preko tačke neutralnosti $|n| \approx 0$ u kojoj ρ_{xy} menja znak i gde je $\nu = 0$. Pošto su pokretljivosti nosilaca μ u dobijenim uzorcima tipično oko $3000 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ i slabo su zavisne od n , merenja pri konstantnom B omogućavaju bolji uvid u KHE. Takvim merenjima odgovara skoro konstantni parametar μB koji određuje kvalitet kvantizacije, što omogućava istovremeno uočavanje nekoliko KHE platoa samo jednim prolaskom kroz naponski opseg pri srednje jakim magnetnim poljima (slika 4.4a). Period Δn kvantnih oscilacija ρ_{xx} kao funkcije n određen je degeneracijom geB/h Landauovih nivoa. Na slici 4.4b je $n \approx 1.2 \times 10^{12}\text{cm}^{-2}$ pri $B = 12\text{T}$, što daje $g = 4$ i potvrđuje dodatnu četverostruku degeneraciju u grafenu. Slika 4.4a pokazuje da, iako Holovi platoi u dvoslojnom grafenu prate celobrojni niz $\sigma_{xy} = \pm(4e^2/h)N$ za $N \geq 1$, nema ni traga od $N = 0$ platoa kada je $\sigma_{xy} = 0$, koji se očekuje za obične 2D fermionske sisteme. U ovome je ponašanje dvosloja slično KHE kod bezmasenih Dirakovih fermiona u jednoslojnom grafenu (slika 3.4), gde takođe nema $N = 0$ platoa već se javlja skok σ_{xy} pri prolasku kroz tačku neutralnosti, što je bilo objašnjeno kao posledica postojanja Landauovog nivoa nulte energije. To ukazuje na postojanje Landauovog nivoa energije nula i u dvoslojnom grafenu. Međutim, u dvosloju pomenuti skok ima dvostruku visinu i praćen je centralnim pikom u ρ_{xx} koji je dva puta širi od ostalih pikova (slika 4.4b). Duplo širi pik ukazuje da prelaz između najnižeg šupljinskog i najnižeg elektronskog Holovog platoa u dvoslojnom grafenu zahteva duplo više nosilaca nego što je potrebno za prelaz među ostalim KHE platoima. To znači da Landauov nivo nulte energije ima dva puta veću degeneraciju od ostalih tj. $2 \times 4eB/h$, što se, kako se pokazuje, može posmatrati kao dva Landauova nivoa koji se spajaju pri $|n| \approx 0$.

Treba još napomenuti da su neprekidna merenja preko $\nu = 0$ bila neizvodljiva kod uobičajenih



Slika 4.5: Otpornost dvoslojnog grafena u blizini nultih koncentracija nosilaca kao funkcija magnetnog polja i temperature. Pik u ρ_{xx} ostaje reda $h/(4e^2)$, nezavisno od B (a, b) i T (c, d).

2D sistema. Kod njih je plato na nultoj energiji u Holovoj provodnosti $\sigma_{xy} = \rho_{xy}/(\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2)$ posledica brzog (često eksponencijalnog) porasta longitudinalne otpornosti $\rho_{xx} \gg h/e^2$ sa porastom B i smanjenjem temperature T pri popunjenostima $\nu < 1$, što ukazuje na neprovodno stanje. Da bi se obezbedilo direktno poređenje sa standardnim KHE merenjima, na slici 4.5 je prikazana zavisnost ρ_{xx} u dvoslojnom grafenu od magnetnog polja B i temperature T u okolini $\nu = 0$. Dvoslojni grafen poseduje malu magnetootpornost sa slabom temperaturskom zavisnošću u tački neutralnosti, što je u upadljivoj suprotnosti sa standardnim KHE ponašanjem. Iz toga sledi da σ_{xy} u dvosloju ne iščezava na nekom intervalu ν i uzima vrednost nula samo u jednoj tački u kojoj ρ_{xy} menja znak. Začuđujuća je činjenica da se vrednost pika ρ_{xx} približno održava u blizini $h/(4e^2)$ pri jačinama polja i do 20T i temperaturama od 1K. I ona dodatno ukazuje na odsustvo procepa u spektru Landauovih nivoa pri nultoj energiji. Konačna vrednost ρ_{xx} u limitu niskih koncentracija nosilaca i u nultom magnetnom polju nađena je i u jednoslojnom grafenu. Uočeni efekat je u slučaju jednoslojnog grafena bio u kvalitativnom slaganju sa teorijom koja konačnu provodnost i odsustvo lokalizacije pripisuje spektru ekscitacija sličnom relativističkom. Dvoslojni grafen ima uobičajeni kvadratični spektar usled čega su postojanje maksimuma otpornosti od $\approx h/(4e^2)$ i njegova slaba zavisnost od B sasvim neočekivani.

4.3 Landauovi nivoi u dvoslojnom grafenu i objašnjenje KHE

Kao i ranije, za osnovno razjašnjenje KHE neophodno je da znamo spektar Landauovih nivoa. Razmotrićemo dvoslojni grafen u konstantnom normalnom magnetnom polju $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, $B > 0$. Neka je $\mathbf{A}(x, y)$ odgovarajući vektorski potencijal za koji je $B = \partial A_y(x, y)/\partial x - \partial A_x(x, y)/\partial y$. Hamiltonijan u magnetnom polju se dobija iz "slobodnog" hamiltonijana minimalnom smenom $\mathbf{k} \rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} + e/\hbar \mathbf{A}(i\partial/\partial \mathbf{k})$ kojoj odgovara smena $k_{\pm} \rightarrow \pi_{\pm} = \kappa_x \pm i\kappa_y$ u (4.9). Tako se dobija sledeći hamiltonijan za dvosloj u magnetnom polju:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{K}_{\xi}}(\mathbf{k}) = \xi \begin{pmatrix} \Delta/2 & \xi t_{\perp} & 0 & \hbar v_F \pi_{-} \\ \xi t_{\perp} & -\Delta/2 & \hbar v_F \pi_{+} & 0 \\ 0 & \hbar v_F \pi_{-} & -\Delta/2 & 0 \\ \hbar v_F \pi_{+} & 0 & 0 & \Delta/2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Neka je $\Psi_E = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T$ talasna funkcija za koju važi $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_{\xi}}(\mathbf{k})\Psi_E = E\Psi_E$. Svojtveni

problem $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_\xi}(\mathbf{k})$ je ekvivalentan sledećem sistemu jednačina:

$$\pi_- \Psi_4 = \left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\Psi_1 - \xi\tau_\perp \Psi_2, \quad \pi_+ \Psi_3 = -\xi\tau_\perp \Psi_1 + \left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)\Psi_2, \quad (4.18)$$

$$\pi_- \Psi_2 = \left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)\Psi_3, \quad \pi_+ \Psi_1 = \left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\Psi_4, \quad (4.19)$$

pri čemu su uvedene oznake $\varepsilon = E/(\hbar v_F)$, $\delta = \Delta/(\hbar v_F)$, $\tau_\perp = t_\perp/(\hbar v_F)$. Talasne funkcije Ψ_1 i Ψ_2 (koje dominiraju pri višim energijama) moguće je izraziti iz (4.18) preko Ψ_3 i Ψ_4 (koje dominiraju na nižim) na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left(\left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)\pi_- \Psi_4 + \xi\tau_\perp \pi_+ \Psi_3 \right), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left(\left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\pi_+ \Psi_3 + \xi\tau_\perp \pi_- \Psi_4 \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

gde je $\mathcal{D} = \varepsilon^2 - \delta^2/4 - \tau_\perp^2 \neq 0$. Uvrštavanjem dobijenih izraza u (4.19) dobijamo sledeće dve jednačine:

$$\begin{aligned} \left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)\mathcal{D}\Psi_3 &= \left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\pi_- \pi_+ \Psi_3 + \xi\tau_\perp (\pi_-)^2 \Psi_4, \\ \left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\mathcal{D}\Psi_4 &= \xi\tau_\perp (\pi_+)^2 \Psi_3 + \left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)\pi_+ \pi_- \Psi_4. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Označimo sa $|n\rangle$ svojstvenu funkciju operatora $\pi_+ \pi_-$ za koju važi $\pi_+ \pi_- |n\rangle = 2neB/\hbar |n\rangle$, gde $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je $\pi_- |n\rangle = \sqrt{2eB/\hbar} \sqrt{n} |n-1\rangle$ i $\pi_+ |n\rangle = \sqrt{2eB/\hbar} \sqrt{n+1} |n+1\rangle$. Potražimo rešenja sistema (4.21) u obliku $\Psi_3 = C_3 |n-2\rangle$, $\Psi_4 = C_4 |n\rangle$, za $n \geq 2$. Dobijamo da koeficijenti C_3 i C_4 moraju da zadovolje jednačine:

$$\begin{aligned} \left[\left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)\mathcal{D} - \frac{2eB}{\hbar} (n-1) \left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right) \right] C_3 - \frac{2eB}{\hbar} \xi\tau_\perp \sqrt{n(n-1)} C_4 &= 0, \\ -\frac{2eB}{\hbar} \xi\tau_\perp \sqrt{n(n-1)} C_3 + \left[\left(\xi\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\mathcal{D} - \frac{2eB}{\hbar} n \left(\xi\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right) \right] C_4 &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

koje imaju netrivialno rešenje ukoliko je $\xi\varepsilon$ nula polinoma četvrtog stepena:

$$P_n(x; \delta, \tau_\perp) = 0, \quad P_n(x; \delta, \tau_\perp) = \left[\left(x - \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{2eB}{\hbar} n \right] \left[\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{2eB}{\hbar} (n-1) \right] - \tau_\perp^2 \left(x^2 - \frac{\delta^2}{4}\right). \quad (4.23)$$

Može se pokazati da dobijena jednačina u svim slučajevima od interesa ima četiri realna rešenja za koja važi $x_n^{(1)} < x_n^{(2)} < 0 < x_n^{(3)} < x_n^{(4)}$. Energije Landauovih nivoa (u jedinicama $\hbar v_F$ do kraja odeljka) u tačkama \mathbf{K}_\pm su tada $\varepsilon_{\mathbf{K}_\pm}^{(i)}(n) = \pm x_n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Rešenja $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(4)}$ daju visokoenergijske nivoe, a $x_n^{(2)}$ i $x_n^{(3)}$ niskoenergijske. Postojanje nisko i visokoenergijskih nivoa je očekivano jer u spektru van magnetnog polja postoje nisko i visokoenergijske grane. Talasne

funkcije koje odgovaraju dobijenim energijama su:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbf{K}_\xi}^{(i)}(n) &= \mathcal{N}_n^{(i)}(\Psi_1^{(i)}(n), \Psi_2^{(i)}(n), \Psi_3^{(i)}(n), \Psi_4^{(i)}(n))^T, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\
\Psi_1^{(i)}(n) &= \xi \tau_\perp (x_n^{(i)} - \frac{\delta}{2}) |n-1\rangle, \quad \Psi_2^{(i)}(n) = [\frac{2eB}{\hbar} n - (x_n^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2] |n-1\rangle, \\
\Psi_3^{(i)}(n) &= \sqrt{\frac{2eB}{\hbar}} \frac{\sqrt{n-1}}{x_n^{(i)} + \delta/2} [\frac{2eB}{\hbar} n - (x_n^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2] |n-2\rangle, \quad \Psi_4^{(i)}(n) = \xi \tau_\perp \sqrt{\frac{2eB}{\hbar}} \sqrt{n} |n\rangle, \\
\mathcal{N}_n^{(i)} &= \{[\frac{2eB}{\hbar} n + (x_n^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2] \tau_\perp^2 + [1 + \frac{2eB}{\hbar} \frac{n-1}{(x_n^{(i)} + \delta/2)^2}] [\frac{2eB}{\hbar} n - (x_n^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2]^2\}^{-1/2},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

gde je $\mathcal{N}_n^{(i)}$ normalizacioni koeficijent.

Do sada su razmotrena rešenja za $n \geq 2$. Pretpostavljanjem rešenja jednačina (4.21) u obliku $\Psi_3 = 0, \Psi_4 = C_4 |1\rangle$, što formalno odgovara izboru $n = 1$, dobija se jednačina trećeg stepena koju mora da zadovolji $\xi\varepsilon$:

$$P_1(x; \delta, \tau_\perp) = 0, \quad P_1(x; \delta, \tau_\perp) = (x - \frac{\delta}{2})(x^2 - \frac{\delta^2}{4} - \tau_\perp^2) - \frac{2eB}{\hbar}(x + \frac{\delta}{2}). \tag{4.25}$$

Formalno, postoji i četvrta mogućnost $\xi\varepsilon = -\delta/2$, ali to daje samo trivijalno rešenje koje nije od interesa. Lako se uviđa da važi $P_1(\delta/2; \delta, \tau_\perp) = -2eB/\hbar \cdot \delta$ i $P_1(-\delta/2; \delta, \tau_\perp) = \tau_\perp^2 \delta$, pa polinom $P_1(x; \delta, \tau_\perp)$ ima nulu $x_1^{(1)}$ koja pripada intervalu $(-|\delta|/2, |\delta|/2)$ i daje Landauove nivoe niske energije. Postoje još dve realne nule $P_1(x; \delta, \tau_\perp)$ za koje važi $x_1^{(2)} < -\sqrt{\tau_\perp^2 + \delta^2/4}$, $\sqrt{\tau_\perp^2 + \delta^2/4} < x_1^{(3)}$ i koje daju visokoenergijske Landauove nivoe. Energije nivoa u tačkama \mathbf{K}_\pm su u ovom slučaju $\varepsilon_{\mathbf{K}_\pm}^{(i)}(1) = \pm x_1^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Pridružene talasne funkcije date su izrazima:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbf{K}_\xi}^{(i)}(1) &= \mathcal{N}_1^{(i)}(\Psi_1^{(i)}(1), \Psi_2^{(i)}(1), \Psi_3^{(i)}(1), \Psi_4^{(i)}(1))^T, \quad i = 1, 2, 3, \\
\Psi_1^{(i)}(1) &= \xi \tau_\perp (x_1^{(i)} - \frac{\delta}{2}) |0\rangle, \quad \Psi_2^{(i)}(1) = [\frac{2eB}{\hbar} - (x_1^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2] |0\rangle, \\
\Psi_3^{(i)}(1) &= 0, \quad \Psi_4^{(i)}(1) = \xi \tau_\perp \sqrt{\frac{2eB}{\hbar}} |1\rangle, \\
\mathcal{N}_1^{(i)} &= \{[\frac{2eB}{\hbar} + (x_1^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2] \tau_\perp^2 + [\frac{2eB}{\hbar} - (x_1^{(i)} - \frac{\delta}{2})^2]^2\}^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Sistem (4.21) ima još jedno rešenje $\Psi_3 = 0, \Psi_4 = |0\rangle$, pri čemu mora biti $\xi\varepsilon = \delta/2$. Dobijeni Landauovi nivou u ovom slučaju formalno odgovaraju izboru $n = 0$ i imaju energije $\varepsilon_{\mathbf{K}_\pm}^{(1)}(0) = \pm\delta/2$. Svojstvene funkcije koje im odgovaraju su:

$$\Psi_{\mathbf{K}_\xi}^{(1)}(0) = (0, 0, 0, |0\rangle)^T. \tag{4.27}$$

Potrebno je odrediti degeneraciju dobijenih Landauovih nivoa. Ukoliko je x nula $P_n(x; \delta, \tau_\perp)$ ($n \geq 1$) tada $-x$ nije, osim kod simetričnog dvosloja kada je $\delta = 0$. To sledi iz očigledne osobine polinoma $P_n(-x; -\delta, \tau_\perp) = P_n(x; \delta, \tau_\perp)$ ($n \geq 2$) i $P_1(-x; -\delta, \tau_\perp) = -P_1(x; \delta, \tau_\perp)$. Stoga treba razmotriti posebno simetrični i asimetrični dvosloj.

U slučaju asimetričnog dvosloja za svako $n \geq 2$ postoji osam mogućih energija:

$$\underbrace{\overbrace{\{-x_n^{(4)}, -x_n^{(3)}\}}^{<0} \overbrace{\{-x_n^{(2)}, -x_n^{(1)}\}}^{>0}}_{\mathbf{K}_-} \underbrace{\overbrace{\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\}}^{<0} \overbrace{\{x_n^{(3)}, x_n^{(4)}\}}^{>0}}_{\mathbf{K}_+}, \quad (4.28)$$

za $n = 1$ postoji njih šest:

$$\underbrace{\overbrace{\{-x_1^{(3)}\}}^{<0} \overbrace{\{-x_1^{(2)}\}}^{>0}}_{\mathbf{K}_-} \underbrace{\overbrace{\{-x_1^{(1)}\}}^{\in(-|\delta|/2, |\delta|/2)} \overbrace{\{x_1^{(1)}\}}^{\in(-|\delta|/2, |\delta|/2)}}_{\mathbf{K}_- \quad \mathbf{K}_+} \underbrace{\overbrace{\{x_1^{(2)}\}}^{<0} \overbrace{\{x_1^{(3)}\}}^{>0}}_{\mathbf{K}_+}, \quad (4.29)$$

dok za $n = 0$ postoje samo dve:

$$\underbrace{\{-\delta/2\}}_{\mathbf{K}_-} \underbrace{\{\delta/2\}}_{\mathbf{K}_+}. \quad (4.30)$$

Može se uočiti da je ukupni spektar simetričan u odnosu na nultu energiju kao i da u spektru ne postoji Landauov nivo sa energijom nula. Degeneracija svakog nivoa je $2eB/h$ (množitelj dva je zbog spinske degeneracije). Pošto je struktura Landauovih nivoa i njihova degeneracija (do na množitelj 2) kao u klasičnom slučaju, zaključuje se da asimetričnom dvosloju grafena odgovara uobičajeni KHE uočen kod standardnih poluprovodnika sa kvantizacijom $\sigma_{xy} = (2e^2/h)N$, $N \in \mathbb{Z}$.

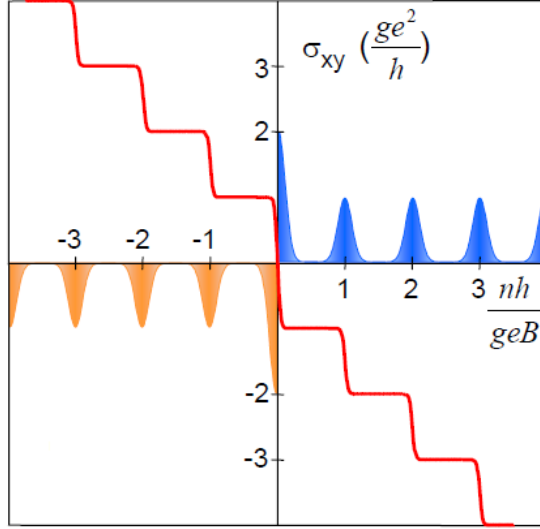
Simetrični dvosloj je zanimljiviji. Budući da je $\delta = 0$ jednačine se uprošćavaju pa će biti prikazani eksplicitni izrazi za energije. Ukoliko je ε moguća energija tada je to i $-\varepsilon$, pa za svako $n \geq 2$ postoje samo četiri energije Landauovih nivoa:

$$\begin{aligned} x_n^{(4)} &= -x_n^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\tau_\perp^2 + \frac{2eB}{\hbar} (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2} + \sqrt{\tau_\perp^2 + \frac{2eB}{\hbar} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2} \right), \\ x_n^{(3)} &= -x_n^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\tau_\perp^2 + \frac{2eB}{\hbar} (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2} - \sqrt{\tau_\perp^2 + \frac{2eB}{\hbar} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Talasne funkcije $\Psi_{\mathbf{K}_+}^{(i)}(n)$ i $\Psi_{\mathbf{K}_-}^{(5-i)}(n)$ odgovaraju energijama $\varepsilon_{\mathbf{K}_+}^{(i)}(n) = x_n^{(i)} = -x_n^{(5-i)} = \varepsilon_{\mathbf{K}_-}^{(5-i)}(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, pa se degeneracija Landauovih nivoa udvostručuje. Kao što smo videli, postojanje asimetrije među slojevima bi ukinulo dupliranu degeneraciju. Za $n = 1$ postoje tri energije:

$$\{x_1^{(1)} = 0, x_1^{(2)} = -\sqrt{\tau_\perp^2 + \frac{2eB}{\hbar}}, x_1^{(3)} = \sqrt{\tau_\perp^2 + \frac{2eB}{\hbar}}\}. \quad (4.32)$$

Talasne funkcije $\Psi_{\mathbf{K}_+}^{(1)}(1)$ i $\Psi_{\mathbf{K}_-}^{(1)}(1)$ odgovaraju energiji nultoj $\varepsilon_{\mathbf{K}_+}^{(1)}(1) = \varepsilon_{\mathbf{K}_-}^{(1)}(1)$, dok $\Psi_{\mathbf{K}_+}^{(i)}(1)$ i $\Psi_{\mathbf{K}_-}^{(5-i)}(1)$ odgovaraju energijama $\varepsilon_{\mathbf{K}_+}^{(i)}(1) = x_1^{(i)} = -x_1^{(5-i)} = \varepsilon_{\mathbf{K}_-}^{(5-i)}(1)$, $i = 2, 3$. Ponovo se uočava dupliranje degeneracije Landauovih nivoa. Veoma je bitna činjenica da se u simetričnom dvosloju pojavljuje Landauov nivo nulte energije koji je bio odsutan u prisustvu asimetrije. On nastaje iz dvaju nivoa energija $\pm x_1^{(1)}$ ($\delta \neq 0$) koji se, budući iz intervala $(-|\delta|/2, |\delta|/2)$, u graničnom slučaju $\delta \rightarrow 0$ spajaju u jedan nivo nulte energije. I u slučaju $n = 0$ dobijamo Landauov nivo nulte energije usled spajanja dvaju nivoa sa energijama $\pm \delta/2$ u graničnom procesu $\delta \rightarrow 0$. Slično kao maločas, talasne funkcije $\Psi_{\mathbf{K}_+}^{(1)}(0)$ i $\Psi_{\mathbf{K}_-}^{(1)}(0)$ odgovaraju nultoj energiji. Pomenuta analiza



Slika 4.6: Shematski prikaz KHE u dvoslojnom grafenu. g predstavlja dodatnu degeneraciju sistema (u našem slučaju je $g = 4$). Odgovarajući niz Landauovih nivoa kao funkcija koncentracije nosilaca n prikazan je plavo i narandžasto za elektrone i šupljine, respektivno.

dovodi do zaključka da je degeneracija Landauovog nivoa nulte energije jednaka $8eB/h$, dok je za sve ostale nivoe degeneracija $4eB/h$.

Izloženi algebarski metod je gejdž-nezavistan i kao takav predstavlja uopštenje metoda korišćenog u referenci [16]. U referenci [14] je umesto potpunog 4×4 hamiltonijana razmatran efektivni niskoenergijski 2×2 hamiltonijan koji je primenljiv samo u opsegu energija $|\varepsilon| < \tau_{\perp}/4$, pa su dobijeni rezultati samo približni. U slučaju Landauovih nivoa za koje važi $8neB/\hbar \ll \tau_{\perp}^2$, što je tačno ili za slabo B ili za dovoljno male vrednosti n , izrazi (4.31) za niskoenergijske nivoe postaju:

$$x_n^{(3)} = -x_n^{(2)} \approx \frac{2eB}{\hbar\tau_{\perp}} \sqrt{n(n-1)}, \quad (4.33)$$

što predstavlja spektar dobijen u [14].

Rešenja dobijena u slučaju jednoslojnog grafena takođe su sadržana u (4.31). Dvosloj se može svesti na dva nezavisna jednosloja ukoliko nema interakcije među slojevima. U našem modelu to znači da je $\tau_{\perp} = 0$, pa se izrazi (4.31) svode na:

$$x_n^{(4)} = -x_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2eB}{\hbar}} \sqrt{n}, \quad x_n^{(3)} = -x_n^{(2)} = \sqrt{\frac{2eB}{\hbar}} \sqrt{n-1}, \quad (4.34)$$

što je upravo rezultat (3.28) dobijen za jednoslojni grafen.

Jedna od posledica kiralne prirode kvazičestica u simetričnom dvoslojnom grafenu je postojanje Landauovog nivoa nulte energije. To objašnjava uočeni neuobičajeni KHE. U Holovoj provodnosti σ_{xy} mora postojati skok pri prelazu preko tačke neutralnosti pošto se pomenuti Landauov nivo nalazi na granici između elektrona i šupljina. Budući da pritom ima i degeneraciju dva puta veću od ostalih nivoa, potreban je dva puta veći broj nosilaca za njegovo popunjavanje (u odnosu na ostale Landauove nivoe), tako da prelaz među odgovarajućim KHE platoima mora

biti dva puta širi ($8eB/h$ umesto $4eB/h$). Takođe, skok u σ_{xy} među platoima mora biti dva puta veći ($8e^2/h$ umesto $4e^2/h$) u odnosu na ostale skokove. Sve to daje uočenu kvantizaciju $\sigma_{xy} = (4e^2/h)N$, $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ova razmatranja ilustrovana su na slici 4.6.

4.4 Berijeva faza i KHE u dvosloju

Objašnjenje KHE u jednoslojnom grafenu preko Berijeve faze oslanjalo se na opštija razmatranja modela jake veze u magnetnom polju. Odgovarajuća teorija za dvoslojni grafen još uvek ne postoji. Međutim, dvoslojni grafen takođe poseduje neke osobine koje su bile bitne za razmatranja u jednoslojnom grafenu. To se odnosi na dvostruku degeneraciju spektra u \mathbf{K} tačkama i na postojanje Landauovog nivoa nulte energije. Zato ćemo smatrati da je slična argumentacija primenljiva i u slučaju dvosloja. Analogno jednosloju, biće nađen doprinos nultog Landauovog nivoa koristeći talasne funkcije sistema bez magnetnog polja.

Kvazičestice u okolini \mathbf{K}_{\pm} tačaka opisane su efektivnim 2×2 hamiltonijanom:

$$H_{\mathbf{K}_{\pm}}^{eff}(\mathbf{k}) = \mp \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\phi(\mathbf{k})} \\ e^{-2i\phi(\mathbf{k})} & 0 \end{pmatrix} = \mp \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.35)$$

$$k_x + ik_y = ke^{i\phi(\mathbf{k})}, \quad n_x + in_y = e^{2i\phi(\mathbf{k})}, \quad (4.36)$$

što je u saglasnosti sa opštim oblikom efektivnog hamiltonijana u tački dvostruke degeneracije (2.34). Svojevrsne talasne funkcije $\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r})$ elektronskih (+) i šupljinskih (−) ekscitacija u okolini \mathbf{K}_{+} tačke (i obrnuto u okolini \mathbf{K}_{-}) koje zadovoljavaju granične uslove (2.20) date su izrazima:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{2i\phi(\mathbf{k})} \\ \mp 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Posle odgovarajuće gejdž transformacije dobija se:

$$\tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{2i\phi(\mathbf{k})} \\ \mp 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Uočava se da je jedina razlika u odnosu na jednoslojni grafen u faktoru 2 u eksponentu. Kao i u slučaju jednoslojnog grafena, doprinos Holovoj provodnosti daju šupljine kojima u \mathbf{K}_{\pm} tački odgovaraju talasne funkcije $\tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}$. Doprinos nultog Landauovog nivoa Holovoj provodnosti dat je, po analogiji sa jednoslojem:

$$(\sigma_{xy})_0 = \frac{e^2}{2\pi h} \oint_C \mathcal{A}_B d\mathbf{k}, \quad (4.39)$$

gde se integracija u poslednjem integralu vrši po kružnici C koja je odabrana tako da održava broj stanja. Berijev vektorski potencijal koji u ovom slučaju je:

$$\mathcal{A}_B = -i \langle \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp} | \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\mp}}{\partial \mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{k} \mathbf{e}_{\phi}. \quad (4.40)$$

Primitimo da je vektorski potencijal dva puta veći nego odgovarajući za jednosloj, pa je zato i Berijeva faza duplirana:

$$\gamma_{Berry} = \oint_C \mathcal{A}_B d\mathbf{k} = 2\pi. \quad (4.41)$$

Iz dobijenih rezultata sledi da je doprinos šupljina iz nultog Landauovog nivoa za svaku od \mathbf{K}_{\pm} tačaka jednak:

$$(\sigma_{xy})_0 = \frac{e^2}{h}, \quad (4.42)$$

što stvarno daje uočeni niz platoa.

Moglo bi se očekivati da Berijeva faza od 2π ne utiče na niz KHE platoa. Međutim, iz ranije analize je poznato da Landauov nivo nulte energije ima dva puta veću degeneraciju od ostalih. Za obične poluprovodničke sisteme (u kojima nema Berijeve faze) energija je data sa $E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$ i najniži nivo ima konačnu energiju $\hbar\omega_c/2$, pa zato postoji plato za $n = 0$. U dvoslojnom grafenu je $E_n \approx \hbar\omega_c\sqrt{n(n-1)}$, pa dva najniža nivoa $E_0 = E_1$ imaju nultu energiju. Postojanje duplo degenerisanog Landauovog nivoa na nultoj energiji uzrok je odsustva platoa za $n = 0$ i niza platoa na celobrojnim vrednostima. Na taj način, Berijeva faza 2π , nerazličiva od nulte u kvaziklasičnom limitu $n \gg 1$, ipak se razotkriva u dupliranoj degeneraciji Landauovog nivoa $n = 0$.

5 Zaključak

Dosadašnja teorijska i eksperimentalna znanja o grafenu predstavljaju samo vrh ledenog brega. Prve uočene osobine su već postavile pred fizičare brojna pitanja i otvorile verovatno neslućene mogućnosti primene grafena u tehnologiji budućnosti.

Osnovna fenomenologija KHE, uloga neuređenja, zatim Laflinov argument koji je ukazao na topološku prirodu Holove provodnosti, sam pristup preko topoloških invarijanti i Berijeva faza su obrađeni u drugom poglavlju. Centralni deo poglavlja predstavlja dovođenje Holove provodnosti u vezu sa Černovim brojevima korišćenjem Kuboove teorije linearnog odziva. Iskorišćeni pristup je opštiji od TKNdN teorije jer je ne koristi Blohove talasne funkcije neinteragujućeg sistema, pa je samim tim primenljiv i na frakcioni KHE. Uloga neuređenja i Berijeva faza su obrađeni u meri potrebnoj za objašnjenje KHE. Na slikovitom primeru je ukazano na konceptualno važnu činjenicu da Berijevo polje ima izvore u monopolima u prostoru parametara.

Jednoslojni grafen je obrađen u trećem poglavlju. Dat je prikaz eksperimentalnih činjenica u vezi sa KHE. Glavni deo predstavlja elektronska struktura grafena i KED_{2+1} opis preko Dirakove jednačine koji se zasnivaju na modelu jake veze. U tom svetlu je dat osvrt na kiralnost kao svojstvo bezmasenih nosilaca u jednoslojnom grafenu koje nije uobičajeno u sistemima fizike kondenzovane materije. Određeni su Landauovi nivoi algebarskim metodom koji je nezavistan od izbora gejdža i objašnjena eksperimentalno uočena kvantizacija Holove provodnosti. Izračunavanje Berijeve faze korišćenjem talasnih funkcija slobodnih fermiona opravdano je uz pomoć opštijih razmatranja koja polaze od modela jake veze na rešetki grafena u magnetnom polju. Takvim modelom je moguće predvideti KHE u celom energijskom opsegu, što je već prisutno u literaturi. Razmatranja tog tipa se u bitnoj meri oslanjaju na numeriku i topološku ekvivalentnost rešetke grafena sa kvadratnom i π -fluks rešetkom. Do danas nije nađen analitički način direktnog izračunavanja Holove provodnosti polazeći od njene veze sa prvim Černovim brojem, kao što je to urađeno za kvadratnu rešetku. To je izazov za buduća istraživanja.

Četvrto poglavlje bavi se dvoslojnim grafenom. Određena je njegova elektronska struktura i ukazano je na razlike između simetričnog i asimetričnog dvosloja. Takođe je dat i efektivni niskoenergijski opis koji razotkriva neobičnu prirodu nosilaca koji su maseni kiralni fermioni. Moguća su proširenja modela ubacivanjem dodatnih efekata izmene koji su zanemareni. To dovodi do trigonalne distorzije i daje bolji uvid u osobine dvosloja. Eksperimentalni podaci za KHE su takođe izloženi i dato je objašnjenje izračunavanjem spektra Landauovih nivoa. Spektar je ponovo dobijen algebarskim metodom iz potpunog hamiltonijana. Na taj način su dobijeni i visoko i niskoenergijski nivoi za asimetrični i simetrični dvoslojni grafen i uspostavljena veza sa eksperimentom. Berijeva faza je i u ovom slučaju povezana sa uočenim KHE. Landauovi nivoi su, kao i kod jednoslojnog grafena, određeni u kontinualnoj aproksimaciji. Model jake veze za rešetku dvosloja u magnetnom polju nije razmatran u literaturi. Bilo bi zanimljivo izvršiti bar numeričku analizu celog spektra Landauovih nivoa polazeći od takvog modela. Osobine dvosloja bitno zavise od normalnog električnog polja jer to dovodi do otvaranja procepa u spektru. Paralelno magnetno polje bi uticalo na uvođenje kompleksnih parametara izmene među slojevima što može da uspostavi vezu sa topološkim fazama i ukaže na nove pojave.

Literatura

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Physical Review Letters* **45**, 494 (1980)
- [2] D.C. Tsui, H.L. Stormer and A.C. Gossard. Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit. *Physical Review Letters* **48**, 1559 (1982)
- [3] R.B. Laughlin. Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Physical Review B* **23**, 5632 (1981)
- [4] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale and M. den Nijs. Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. *Physical Review Letters* **49**, 405 (1982)
- [5] J.E. Avron and R. Seiler. Quantization of the Hall Conductance for General, Multiparticle Schrödinger Hamiltonians. *Physical Review Letters* **54**, 259 (1985)
- [6] Q. Niu, D.J. Thouless and Y.S. Wu. Quantized Hall conductance as a topological invariant. *Physical Review B* **31**, 3372 (1985)
- [7] Q. Niu and D.J. Thouless. Quantum Hall effect with realistic boundary conditions *Physical Review B* **35**, 2188 (1987)
- [8] J.E. Avron, D. Osadchy and R. Seiler. A Topological Look at the Quantum Hall Effect. *Physics Today*, August 2003, 38
- [9] M.V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London*. **A392**, 45-57 (1984)
- [10] Y. Zhang, J.W. Tan, H.L. Stormer and P. Kim. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene. *Nature* **438**, 201-204 (2005)
- [11] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos and A.A. Firsov. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature* **438**, 197-200 (2005)
- [12] Y. Hatsugai, T. Fukui and H. Aoki. Topological analysis of the quantum Hall effect in graphene: Dirac-Fermi transition across van Hove singularities and edge versus bulk quantum numbers. *Physical Review B* **74**, 205414 (2006)
- [13] K.S. Novoselov, E. McCann, S.V. Morozov, V.I. Fal'ko, M.I. Katsnelson, A.K. Geim, F. Schedin and D. Jiang. Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2π in bilayer graphene. *Nature Physics* **2**, 177-180 (2006)
- [14] E. McCann and V. Fal'ko. Landau-Level Degeneracy and Quantum Hall Effect in a Graphite Bilayer. *Physical Review Letters* **96**, 086805 (2006)
- [15] E. McCann, D.S.L. Abergel and V. I. Fal'ko, *Electrons in bilayer graphene*. *Solid State Communications* **143**, 110 (2007)

- [16] J. Milton Pereira Jr., F.M. Peeters and P. Vasilopoulos, Landau levels and oscillator strength in a biased bilayer of graphene. *Physical Review B* **76**, 115419 (2007)
- [17] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov and J.P. Carbotte. AC Conductivity of graphene: from tight-binding model To 2+1-dimensional quantum electrodynamics. cond-mat/0706.3016
- [18] M.I. Katsnelson. Graphene: carbon in two dimensions. *Materials Today* **10**, Issue 1&2, 20 (2007)
- [19] A.K. Geim and K.S. Novoselov. The rise of graphene. *Nature Materials Vol. 6*, 3 (2007)
- [20] A.K. Geim and A.H. MacDonald. *Graphene: Exploring carbon flatland. Physics Today*, August 2007, 35-41
- [21] E. Fradkin. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Frontiers in Physics, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.